

1. Disegnare le curve di livello di quota -1 , 0 e 1 per ognuna delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = 4xy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

(b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ con $x^2 + y^2 > 1$,

(c) $f(x, y) = x^3 - xy$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

(d) $f(x, y) = x^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

2. Si consideri la superficie di equazione $z - 3 = +\sqrt{6 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2}$.

(a) Si dimostri che si tratta di una porzione di sfera, e se ne trovino centro e raggio.

(b) Si trovi l'equazione del piano tangente alla sfera nel punto di coordinate $(2, 3, 5)$.

3. Calcolare le derivate parziali di primo e secondo ordine delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$, (b) $Q(v, w) = w \cdot \ln v$,

(c) $S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, (d) $\Phi(s, t) = se^{at}$.

4. Il diametro di un cilindro circolare retto misura $6,0 \pm 0,1$ cm mentre la sua altezza misura $4,0 \pm 0,1$ cm. Qual è (a) il massimo errore possibile e (b) il massimo errore percentuale che si commette nel calcolo del volume? (Si usi il differenziale totale per approssimare l'errore sul volume.)

5. Data la funzione $f(x, y) = x^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

(a) disegnare le curve di livello per le quote 0 e 1 ;

(b) calcolare la derivata direzionale nel punto $(1, 0)$ in direzione dell'asse delle x negative;

(c) disegnare il grafico di f .

6. Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$z = f(x, y) = (x + 2y - 2)^2 + 3(y - 2x)^2$$

nel punto $P(3, 6)$ secondo la direzione della retta di equazione $2x - y = 0$.

7. (a) In quale direzione orientata si dovrebbe procedere per ottenere la massima velocità di crescita della funzione $z = f(x, y) = 3x - 4y + 26$?

(b) Qual è la velocità istantanea di variazione di f riferita all'unità di lunghezza in questa direzione?