Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 30. 11. 2002

1. Secondo un particolare metodo radioattivo si usa l'isotopo ^{42}K del potassio. Esso perde il 5% della sua intensità di radiazione ogni ora. Che percentuale perderà in tre ore? Dopo quante ore ha perso il 90% della sua intensità di radiazione?

2. Dati il vettore $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e la matrice $\mathbf{A} = 2\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, sia il vettore $\vec{b} = \mathbf{A}\vec{a}$.
   a) Si calcoli il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$.
   b) Si trovi l'angolo tra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
   c) Si determini l'area del parallelogramma che ha per lati i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
   d) Si scriva il vettore $\vec{b}$ come somma di un vettore $\vec{b}_1$ parallelo ad $\vec{a}$ e di un vettore $\vec{b}_2$ perpendicolare ad $\vec{a}$.

3. Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti:
   a) $\lim_{t\to+\infty} \log(\frac{t+2}{t-3})$, b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 2x}{x}$, c) $\lim_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

4. Trovare le derivate di
   a) $v(t) = t^{-1} + \sqrt{t}$, b) $y = \cos(x^3+1)$, c) $y = \frac{x}{x-2}$, d) $y = x \cdot \ln x$.

5. Si ricordi che il pH di una soluzione acquosa è stato definito da Sørensen come $p\mathrm{H} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$, dove $[\mathrm{H}^+]$ indica la concentrazione (in mol/l) di H^+. Ponendo $y := p\mathrm{H}$ e $x := [\mathrm{H}^+]$, si ha la funzione $y = f(x) = -\log_{10} x$.
   a) Si trovi la derivata di $y = f(x) = -\log_{10} x$.
   b) Una soluzione abbia un pH di 4. Per quale pH la concentrazione di H^+ risulterebbe cento volte maggiore?
   c) Sia $[\mathrm{H}^+] = 4 \times 10^{-6}$ mol/l. Utilizzando che $\log_{10} 2 = 0,3$, trovare il pH.
   d) Se il pH è stato determinato con una accuratezza di un decimo di pH, con quale errore percentuale si conosce $[\mathrm{H}^+]$? (Si usi il differenziale della funzione $y = f(x) = -\log_{10} x$ e il valore $\log_{10} e \approx 0,4$.)