Esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 5. 11. 2003

1. Determinare l'area del parallelogramma che ha per lati i vettori $\vec{a} = (3, -3, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, -4)$.

2. Dati i tre punti $O(0, 0, 0)$, $A(-1, 1, 0)$ e $B(1, 0, 2)$, calcolare l'area del parallelogramma di vertici O, A, C, B.

3. Dati i tre punti $A(4, -1, 1)$, $B(3, 0, 1)$ e $C(5, -1, 3)$, calcolare

   a) i vettori $\vec{a} := \overrightarrow{AB}$ e $\vec{b} := \overrightarrow{AC}$;
   b) il prodotto scalare di $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
   c) il prodotto vettoriale di $\vec{a}$ e $\vec{b}$;
   d) l'area del triangolo di vertici A, B, C.

4. Trovare l'area del triangolo di vertici $(1, -2, 0)$, $(3, -1, 0)$, $(-1, 2, 0)$.

5. Dati i punti $P_1 = (x_1, y_1, 0)$, $P_2 = (x_2, y_2, 0)$, $P_3 = (x_3, y_3, 0)$, calcolare l'area del triangolo di vertici P_1, P_2, P_3. (Suggerimento: si considerino i vettori $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ e il loro prodotto vettoriale.)

6. Calcolare il determinante della matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Calcolare il volume del parallelepipedo di spigoli $\vec{a} = (1, -3, 2)$, $\vec{b} = (4, 2, 1)$, $\vec{c} = (1, 0, -1)$.

8. Una cellula elementare di saccarosio cristallino ha la forma di un parallelepipedo di spigoli $|\vec{a}| = 10,9$ Å, $|\vec{b}| = 8,7$ Å e $|\vec{c}| = 7,8$ Å (1 Å$=10^{-10}$ m) e di angoli $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$, $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{c}) = 102,9^\circ$, $\sphericalangle(\vec{b}, \vec{c}) = 90^\circ$. Calcolarne il volume (in nm^3).

9. Dimostrare che i vettori $\vec{v}_1 = (1, -2, 0)$, $\vec{v}_2 = (0, 1, 4)$, $\vec{v}_3 = (0, -1, -3)$ sono linearmente indipendenti ed esprimere $\vec{v}_4 = (-1, 2, 3)$ come loro combinazione lineare.

10. Verificare se i vettori $\vec{a} = (5, 1, 0)$, $\vec{b} = (2, 1, 1)$, $\vec{c} = (1, -1, -2)$ sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti.

11. Si dimostri che i vettori $\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$ e $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$ formano una base di vettori ortonormali in $\mathbf{R}^3$.

12. Trovare una base ortonormalizzata di $V := \{\vec{v} = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x - y + 2z = 0\}$.

13. Trovare una condizione geometrica su $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ affinché valga uguaglianza nella disugualianza di Schwarz:
$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \,.$$