

1. Sviluppare la potenza  $(p - 2)^5$ .
2. Qual è il coefficiente di  $a^3b^2c$  nello sviluppo della potenza  $(a + b + c)^6$ ?
3. Quanti sono i numeri di 7 cifre che si possono formare in notazione binaria? E quanti in notazione decimale?
4. Determinare quanti termini diversi si ottengono eseguendo la potenza  $(a + b + c + d)^3$ .
5. Uno studente deve rispondere solamente a 3 domande di un questionario che ne contiene 10. Quante sono le possibili scelte?
6. Tutte le proteine sono polimeri di 20 tipi diversi di alfa-amminoacidi e differiscono tra loro per il numero, la composizione e la sequenza degli amminoacidi.
  - (a) Quante sequenze amminoacidiche di lunghezza 300 si possono formare?
  - (b) Si considerino sequenze di due soli amminoacidi e di una lunghezza  $\leq 10$ . Quante sono?
7. Un giocatore del SuperEnalotto deve pronosticare i sei numeri estratti da novanta numeri. Quante sono le possibili scelte?
8. Trovare i limiti  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x - 2}$  e  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3}{x - 2}$ .
9. Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti:
  - a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ ,
  - b)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{6t}{2 + \ln t}$ ,
  - c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \text{sen } x$ ,
  - d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$ .
10. Siano  $a, b, c \in \mathbf{R}$  costanti positive. Trovare i limite delle seguenti funzioni per  $t \rightarrow +\infty$ :
  - (a)  $f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$  (funzione logistica di crescita).
  - (b)  $f(t) = a\left(1 + \frac{b - a}{a - be^{c(b-a)t}}\right)$  (funzione della cinetica chimica).
11. Il cesio isotopo  $^{137}\text{Cs}$  perde annualmente il 2,3 % della sua massa per disintegrazione radioattiva.
  - (a) Calcolare il suo semiperiodo (“tempo di dimezzamento”), cioè il tempo necessario affinché la metà del numero di atomi della sostanza radioattiva inizialmente presenti si trasformi (e, di conseguenza, il numero di atomi della sostanza radioattiva risulti dimezzato).
  - (b) Calcolare il tempo necessario affinché una data quantità di questo isotopo si riduca a meno del 25 %, a meno dell’1 %, a meno dello 0,1 % della quantità iniziale.
  - (c) Siano presenti inizialmente  $N_0$  atomi dell’isotopo. Determinare il parametro  $\lambda$  in modo tale che il numero  $N$  dei atomi presenti al tempo  $t$  (in anni) sia approssimativamente  $N = N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ .

12. In una coltura batterica sono presenti inizialmente  $N_0$  batteri. Il loro numero raddoppia ogni 3 ore.
- Quanti batteri ci saranno nella coltura dopo 24 ore?
  - Determinare il parametro  $\lambda$  in modo tale che il numero  $N$  dei batteri al tempo  $t$  (in ore) sia approssimativamente  $N = N(t) = N_0 e^{\lambda t}$ .
  - Di quale percentuale cresce la coltura in un minuto?
13. Consideriamo una sostanza contenente  $N_0$  atomi radioattivi (al tempo  $t = 0$ ) e supponiamo che ci sia un solo genere di isotopo radioattivo. Indichi  $N$  il numero degli atomi radioattivi presenti nella sostanza al tempo  $t$ . La disintegrazione radioattiva segue la legge  $N = N_0 e^{-\lambda t}$ . Trovare il semiperiodo (cioè il tempo di dimezzamento) delle sostanze radioattive a)  $^{131}\text{I}$ , b)  $^{18}\text{F}$  le cui costanti  $\lambda$  di disintegrazione sono  $0,086 \text{ d}^{-1}$  e  $0,371 \text{ h}^{-1}$ , rispettivamente (d = giorno, h = ora). Questi isotopi sono usati in medicina sia per la diagnosi sia per la terapia.
14. Calcolare il reciproco del numero complesso  $z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ . Partendo da un numero complesso  $w$ , come si può ottenere geometricamente il numero  $w \cdot z$ ?
15. Calcolare la distanza fra i punti  $(2, -3, 1)$  e  $(6, -4, -3)$ .
16. Per il sangue umano il pH si trova fra 7,37 e 7,44. Trovare i confini corrispondenti per  $[\text{H}^+]$ .
17. Dati i tre punti  $O(0, 0, 0)$ ,  $A(-1, 1, 0)$  e  $B(1, 0, 2)$ , calcolare
- il punto  $C$  tale che  $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ ;
  - la lunghezza della diagonale  $AB$  del parallelogrammo di vertici  $O, A, C, B$ ;
  - l'area del parallelogrammo di vertici  $O, A, C, B$ .
18. Trovare la frazione generatrice  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbf{N}$ ) del numero periodico

$$0,121212\dots = 12 \cdot \left( \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \dots \right)$$

usando la formula della somma di una serie geometrica.

19. Trovare i limiti (se esistono) delle seguenti successioni  $\{a_n\}$  per  $n$  tendente all'infinito:
- $a_n = \frac{6n+1}{\sqrt{9n^2-1}}$ ,
  - $a_n = (-2)^n$ .
20. Un individuo si trova esposto, a partire da un dato istante iniziale, a un certo tipo di radiazioni. Ogni giorno assorbe una quantità fissa  $R$  di radiazioni e perde il 30% della quantità di radiazioni accumulata nei giorni precedenti. Qual è la quantità complessiva di radiazioni, presente nell'organismo:
- dopo 4 giorni dall'istante iniziale;
  - quando viene raggiunto l'equilibrio (il numero dei giorni dall'istante iniziale tende all'infinito)?