Esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti Foglio 2 del 22. 12. 2003

1. Calcolare gli integrali:

   a) $\int x^5\,dx$, b) $\int x^{-5}\,dx$, c) $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

   d) $\int 4\sqrt{x}\,dx$, e) $\int \frac{6x^2+4x+2}{\sqrt{x}}\,dx$, f) $\int -\frac{1}{x}\,dx$.

2. Calcolate i seguenti integrali:

   a) $\int \frac{1}{4x-1}\,dx$, b) $\int \frac{2}{1+4x^2}\,dx$, c) $\int e^{-2x}\,dx$

   d) $\int (3x-2)^{-5}\,dx$, e) $\int (2+5x)^8\,dx$, f) $\int \operatorname{sen}(2x-3)\,dx$

   g) $\int x^2 e^x\,dx$, h) $\int (3x-1)\operatorname{sen} x\,dx$.

3. Calcolate (si veda 1):

   a) $\int_2^3 x^5\,dx$, b) $\int_{-2}^{-1} x^{-5}\,dx$, c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x)\,dx$

   d) $\int_0^9 4\sqrt{x}\,dx$, e) $\int_0^2 \frac{6x^2+4x+2}{\sqrt{x}}\,dx$, f) $\int_1^e -\frac{1}{x}\,dx$.

4. Calcolate:

   a) $\int_0^1 2^x\,dx$, b) $\int_1^2 e^{-x+1}\,dx$, c) $\int_0^4 (|x-1|+|x-3|)\,dx$, d) $\int_{-5}^5 \operatorname{sen}^3 x\,dx$.

5. Calcolate i seguenti integrali ed esprimete i risultati in forma decimale, con 2 cifre significative dopo la virgola:

   a) $\int_0^{10} \frac{1-x}{x}\,dx$, b) $\int_{-1}^1 \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$.

6. Determinate il valore k in modo che risulti:

   a) $\int_{-1}^2 (x+k)\,dx = \int_2^3 (x-k)\,dx$; b) $\int_0^\pi k\ \operatorname{sen} x\,dx = 1$.

7. Calcolate l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico di $y = \operatorname{sen} x$ e l'asse x, al variare di x nell'intervallo $[0,\pi]$.

8. Calcolate l'area della regione finita di piano definita dai grafici delle funzioni $y = \ln x$, $y = 1 + \ln x$ e dalle due rette (verticali) $x = 2$, $x = 5$.

9. Si trovi l'area limitata dalla parabola $y = 2 - x^2$ e dalla retta $y = -x$.

10. Si trovi l'area totale limitata dalla curva $y = x^3 - 4x$ e dall'asse x.

11. Ricavare la formula per l'area di un cerchio di raggio R.

12. Ricavare la formula per il volume di una sfera di raggio R.

13. Ricavare la formula per il volume di un cono retto la cui altezza sia h e il suo raggio sia r.

14. Calcolare il volume del solido generato dalla rotazione della curva $y = \operatorname{sen} x$, $0 \leq x \leq \pi$, intorno l'asse delle x.

15. Calcolare la lunghezza dell'arco di catenaria $y = \cosh x := \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ da $x = 0$ ad $x = \ln 2$.

16. Trovare l'area della regione racchiusa tra le curve $y = x^2$ ed $y = x + 6$.

17. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^3 x}\, dx$.

    La funzione integranda è sommabile sulla semiretta $[1, +\infty[$?

18. Calcolare l'integrale improprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1 + x^2}\, dx$.

19. Stabilite se i seguenti integrali generalizzati esistono, e in caso affermativo calcolateli:

$$\text{a)} \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx, \qquad \text{b)} \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{x}\, dx, \qquad \text{c)} \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x-2)^3}\, dx, \qquad \text{d)} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^2\, dx.$$

20. Si trovi il lavoro compiuto nel pompare tutta l'acqua da un serbatoio conico, avente un raggio di 10 m alla sommità e un'altezza di 8 m, a un un'altezza di 6 m al disopra della sommità del serbatoio.

21. Il gas contenuto in un cilindro la cui sezione trasversale ha un'area costante A si espande o viene compresso per effetto del moto di un pistone. Se p è la pressione del gas in pascal ($1\text{Pa} = 1\text{N/m}^2$) e V è il suo volume in metri cubi, si dimostri che il lavoro compiuto dal gas nel passare da uno stato iniziale (p_1, V_1) a un secondo stato (p_2, V_2) è

$$W = \int_{(p_1, V_1)}^{(p_2, V_2)} p\, dV \ \text{J}.$$

    Suggerimento: Si supponga che l'asse x sia perpendicolare alla faccia del pistone. Quindi, $dV = A\, dx$ e $F = p \cdot A$.

22. Si usi lo sviluppo in serie di Taylor della funzione e^x per trovare un polinomio che approssimi e^{-x^2} nell'intervallo $[0, 1]$ abbastanza bene per calcolare $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ fino alla seconda cifra decimale. Si calcoli in tal modo il valore approssimato dell'integrale.
    Nota: Una primitiva di e^{-x^2} non è esprimibile in termini di funzioni elementari e quindi l'integrale può venir calcolato solo per via numerica.

23. Risolvere le seguenti equazioni differenziali:

$$\text{a)} \quad 2\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = 0\,, \qquad \text{b)} \quad 4\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 5x = 0\,.$$

24. Risolvere le seguenti equazioni differenziali separando le variabili:

$$\text{a)} \quad y' = \frac{y}{x}, \qquad \text{b)} \quad y' = -\frac{x}{y}, \qquad \text{c)} \quad y'\sqrt{1 - x^2} + y^2 = 0 \quad (x \in]-1, 1[).$$

25. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y - 2)$$

    con la condizione iniziale $y(0) = 1$.

    Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\dfrac{1}{y(y-2)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{y-2} - \dfrac{1}{y}\right)$.