Esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 18. 10. 2006

1. Il logaritmo di Nepero y di un numero reale x ($0 < x \leq 10^7$) è definito implicitamente mediante
$$\frac{x}{10^7} = e^{-\frac{y}{10^7}}.$$
Esplicitare la y in funzione della x.

2. Si trovi una maggiorante convergente per la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

3. Disegnare i grafici delle seguenti funzioni (senza eseguire lo studio di funzione) partendo dai grafici delle funzioni seno o coseno:
(a) $f(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$, (b) $f(x) = -\cos x$, (c) $f(x) = 1 - \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

4. Trovare i limiti $\displaystyle\lim_{x\to 2-} \frac{3}{x-2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 2+} \frac{3}{x-2}$.

5. Si calcolino, se esistono, i seguenti limiti:
a) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{4}{1+e^{-3t}}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$, c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln x$,
d) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{6}{2+\ln t}$, e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$.

6. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x + \operatorname{sen} x}{|x|}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0\},$$
si calcolino, se esistono, i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.

7. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ costanti positive. Trovare i limite delle seguenti funzioni per $t \to +\infty$:
(a) $f(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-ct}}$ (funzione logistica di crescita).
(b) $f(t) = a(1 + \dfrac{b-a}{a - be^{c(b-a)t}})$ (funzione della cinetica chimica).

8. Per un vettore $\vec{v} = (x, y) \in \mathbf{C}^2$ la *norma uno* è definita come $\|\vec{v}\|_1 := |x| + |y|$, la *norma due* come $\|\vec{v}\|_2 := \sqrt{|x|^2 + |y|^2}$ e la *norma n* come $\|\vec{v}\|_n := \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}$. Nei casi $|x| \geq |y|$ e $|x| \leq |y|$, calcolare $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n}$ (la cosiddetta *norma infinito*) usando il limite noto $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a \in \mathbf{R},\ a > 0)$.