Esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti

25. 10. 2006

1. Trovare le derivate di

   a) $v(t) = \ln t + t^{-1}$, b) $y = \sqrt{x^2+1}$, c) $y = \dfrac{x}{\ln x}$, d) $y = e^x \operatorname{sen} x$

   e) $v(t) = a \operatorname{sen} t + t^{-2}$, f) $y = \cos(e^{2x})$, g) $y = \dfrac{x^2}{x+5}$, h) $y = \sqrt{x}\,\ln x$.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$,

   a) determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente;
   b) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ nel punto di intersezione del grafico con l'asse y;
   c) trovare i limiti $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

3. Dimostrare che le funzioni

   (a) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$, (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$,

   (c) $f(x) = |x| \cdot \cos x$, $x \in \mathbf{R}$, (d) $f(x) = |x| \cdot (\cos x - 1)$, $x \in \mathbf{R}$

   sono continue in $x = 0$. Esse sono anche derivabili in $x = 0$?

4. Trovare le derivate di

   a) $v(t) = 4t^3 + \dfrac{1}{t}$, b) $y = \cos(5x^2+3)$, c) $y = \dfrac{x}{e^x}$, d) $y = x^2 \cdot \ln x$,

   e) $f(x) = |x| \cdot x^2$. Dire se l'ultima funzione è derivabile anche nel punto $x = 0$ e, in caso affermativo, calcolare $f'(0)$.

5. Trovare le derivate di

   a) $v(t) = at + \dfrac{b}{t} + c$, b) $y = 3\cos x - 2 \operatorname{sen} x$, c) $y = \dfrac{x}{x-3}$,

   d) $z(t) = (1-t)\cos t$, e) $f(y) = a\sqrt{y} \cdot \operatorname{sen} y$, f) $Q(\alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$,

   g) $h(\phi) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\phi}{\cos 3\phi}$, h) $f(x) = \cos(e^{3x})$, i) $f(x) = \cos(4x^2 - x + 1)$.

6. Trovare le funzioni inverse (se esistono) delle seguenti funzioni. Inoltre, calcolare le derivate sia delle funzione che delle funzioni inverse.

   a) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-3x}}$,

   b) $f\colon \mathbf{R} \setminus \{2\} \to \mathbf{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}$,

   c) $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - e^{-x}$,

   d) $f\colon \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$.

7. Discutere il comportamento limite di $f(x) = \dfrac{2x}{x^2-4}$ per $x \to 2^-$, $x \to 2^+$, $x \to -2^-$, ed $x \to -2^+$. Rappresentare un grafico di $f(x)$.

8. Una delle due funzione $f(x)$ e $g(x)$ è la derivata dell'altra. Dire se $f(x)$ è la derivata di $g(x)$ o $g(x)$ è la derivata di $f(x)$.