

1. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

prendendo come punto iniziale  $x_0 = 1$ .

2. Sviluppare la funzione  $f(x) = \sin x$  in serie di Taylor di centro  $x_0 = \frac{\pi}{2}$ .
3. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor delle seguenti funzioni (prendendo come punto iniziale  $x_0 = 0$ ) e dire per quali valori di  $x$  la serie è convergente:
- a)  $f(x) = \ln(1 + 2x)$ ,    b)  $f(x) = e^{2x}$ ,    c)  $f(x) = \ln \frac{1}{1+x}$ ,  
d)  $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ ,    e)  $f(x) = \sin(x^2)$ ,    f)  $f(x) = e^{-x}$ .
4. Calcolare approssimativamente  $\sqrt{2}$  con il polinomio di Taylor di grado 3 e di punto iniziale 0 della funzione  $f(x) = \sqrt{x+1}$  e valutare l'errore, cioè trovare una limitazione del resto di Lagrange.
5. Calcolare una approssimazione della soluzione dell'equazione

$$x + \cos x = 0$$

sostituendo la funzione  $\cos x$  con il suo polinomio di Taylor  $T_3(x)$  di punto iniziale  $x_0 = 0$ . Valutare l'errore che si commette approssimando  $f(x) = \cos x$  con il polinomio  $T_3(x)$ , per  $-1 < x < 0$ , cioè trovare una limitazione del valore assoluto del resto secondo Lagrange  $R_3(x)$ ,  $-1 < x < 0$ .

6. Calcolare i seguenti limiti:

a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$ ,    b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$ ,    c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x}$ ,    d)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{2t} - 1}{t}$ ,  
e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$ ,    f)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$ ,    g)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x}$ ,  
h)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \frac{1}{x})^x$ ,    i)  $\lim_{x \rightarrow -1^-} (1 + \frac{1}{x})^x$ ,    j)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1})^{-x}$ .

7. Data la funzione  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x - 1}$ ,  $x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ,

- a) determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente;  
b) determinare l'equazione della retta tangente al grafico di  $y = f(x)$  nel punto di intersezione del grafico con l'asse  $y$ ;  
c) trovare i limiti  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .