Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 6. 12. 2006

1. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$
con la condizione iniziale $y(0) = -1$.

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$
con la condizione iniziale

   (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

   Suggerimento: Per l'integrazione si usi l'identità $\frac{1}{y(y-3)} = \frac{1}{3}(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y})$.

3. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A e B siano 2 e 1 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dx}{dt} = k(2-x)(1-x)\,,$$
dove k (in $s^{-1}M^{-1}$) è una costante positiva.

   (a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale con la condizione iniziale $x(0) = 0$.
   Per l'integrazione si usi l'identità $\frac{1}{(2-x)(1-x)} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$.

   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$.

4. In una reazione auto-catalitica una sostanza si trasforma in una nuova sostanza, il prodotto, in modo tale che il prodotto stesso catalizza la propria formazione. Supponiamo che il tasso di reazione sia proporzionale all'ammontare x del prodotto al tempo t e proporzionale anche alla quantità ancora disponibile della sostanza originaria. Se a indica la quantità originaria della sostanza, essa diminuisce ad $a - x$ al tempo t. Perciò,
$$\frac{dx}{dt} = kx(a-x) \qquad (k \text{ è una costante positiva}).$$
Trovare il valore di x che rende massimo il tasso di reazione.

5. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$
dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.

   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.