Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 10. 01. 2007

1. Data la funzione $f(x) = 1 + \frac{x}{3} + \frac{3}{x}, \quad x \neq 0,$
   a) trovare i minimi e i massimi relativi e assoluti;
   b) determinare gli asintoti;
   c) disegnare il grafico;
   d) calcolare l'area della regione limitata dal grafico, dall'asse x e dalle rette di equazioni $x = -e$ e $x = -1$.

2. Calcolare gli integrali:

   a) $\int_0^4 (\frac{1}{4}x + 1)^3 \, dx,$ b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \, dx,$ c) $\int x \cos x \, dx.$

3. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A e B siano 3 e 2 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dx}{dt} = k(3 - x)(2 - x) \, ,$$

   dove k (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva.

   (a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale con la condizione iniziale $x(0) = 0$.
   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$.

4. Calcolare la derivata direzionale della funzione $z = f(x, y) = (x + 2y - 2)^2 + 3(y - 2x)^2$ nel punto $P = (3, 6)$ secondo la direzione della retta di equazione $2x - y = 0$.

5. Scrivere il numero complesso $z = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$ nella forma $re^{i\varphi}$ e calcolare z^{-1}.

6. a) In quale direzione orientata si dovrebbe procedere per ottenere la massima velocità di crescita della funzione $z = f(x, y) = 3x - 4y + 26$?
   b) Qual è la velocità istantanea di variazione di f riferita all'unità di lunghezza in questa direzione?

7. La temperatura T in un punto (x, y) su una lastra di metallo è data da

$$T(x, y) = 200 \, e^{-x^2 - 3y^2}$$

   dove T è misurata in °C, e x, y in metri.
   a) Trovare la velocità di incremento della temperatura nel punto $P(2, -1)$ nella direzione verso il punto $Q(3, -3)$.
   b) In quale direzione si ha il massimo incremento in P?
   c) Trovare la massima velocità di incremento in P.
   d) Trovare massimi e minimi della funzione $T(x, y)$.

8. Data la funzione $z = f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$,
   a) determinare i punti stazionari di $f(x, y)$;
   b) trovare i minimi e i massimi locali di $f(x, y)$ diversi da $(0, 0)$;
   c) decidere se $f(x, y)$ ha un minimo o massimo locale nel punto $(0, 0)$.