Esercizi di Matematica – C.d.L. in Tecnologie Chimiche per l'Ambiente e per la Gestione dei Rifiuti 11. 10. 2007

1. Scrivere i seguenti numeri complessi nella forma $re^{i\varphi}$:

   a) $3+4i$, b) $3-4i$, c) $\dfrac{1+i}{1-i}$, d) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$.

2. Scrivere i seguenti numeri nella forma $x+iy$: a) $e^{2\pi i/3}$, b) $5e^{\pi i}$, c) $\dfrac{1}{3}e^{-\pi i/2}$.

3. Calcolare: a) $e^{i\pi/2}\cdot e^{i\pi/3}$, b) $e^{-i\pi/3}\cdot e^{i\pi/2}$, c) $e^{2\pi i}\cdot e^{-2\pi i/3}$, d) $e^{i\pi}/e^{i\pi/2}$.

4. Si risolvano le seguenti equazioni rispetto ai numeri reali x e y:

   a) $(3+4i)^2-2(x-iy)=x+iy$, b) $(\dfrac{1+i}{1-i})^2+\dfrac{1}{x+iy}=1+i$.

5. Quali dei seguenti numeri complessi si possono ottenere da $z=x+iy$ geometricamente? Si faccia un disegno.

   a) $\overline{z}:=x-iy$ (numero complesso coniugato), b) $\overline{(-z)}$, c) $-z$, d) $\dfrac{1}{z}$.

6. Si rappresentino graficamente i punti $z=x+iy$ che soddisfano le condizioni:

   a) $|z|=2$, b) $|z|<2$, c) $|z|>2$, d)$|z-1|=2$, e) $|z+1|=1$,

   f) $|z+1|=|z-1|$, g) $|z+i|=|z-1|$.

7. Si trovino: a) le tre radici cubiche di $-8i$, b) le sei radici seste di 64.

8. Risolvere le seguenti equazioni di secondo grado:

   a) $x^2+9=0$, b) $x^2+6x+25=0$, c) $\lambda^2=6\lambda-18$, d) $p(p+12)+61=0$,

   e) $2u+\dfrac{6}{u}=5$, f) $2s-50=s^2$.

9. Determinare la parte reale e la parte immaginaria di tutte le radici delle seguenti equazioni:

   a) $z^2-i=0$, b) $z^2-1+i=0$, c) $z^3-i=0$, d) $z^3+1=0$,

   e) $z^2+2iz+3=0$, f) $z^2-(1+i)z+5=0$, g) $z^2+z-i=0$.

10. (a) Disegnate nello stesso sistema di riferimento i grafici delle funzioni $f(x)=x$ e $g(x)=-\cos x$.

    (b) Quante sono le soluzioni dell'equazione (1) $\quad x+\cos x=0$?

    (c) Calcolate approssimativamente la soluzione $x\in[-1,0]$ sostituendo nella (1) la funzione $\cos x$ con il suo polinomio di Taylor $p(x)=1-\dfrac{x^2}{2!}$. Valutate l'errore che si commette.

11. Un punto abbia le coordinate $(-1,4)$ in un sistema di riferimento cartesiano del piano. Calcolate tramite la moltiplicazione di numeri complessi le coordinate del punto ruotato intorno all'origine in senso orario di angolo $45°$.

12. Si dimostri che il punto (x,y) descrive una circonferenza unitaria con velocità angolare ω se $z=x+iy=e^{i\omega t}$ e ω è una costante reale.