

1. Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$z = f(x, y) = (x + 2y - 2)^2 + 3(y - 2x)^2$$

nel punto $P = (3, 6)$ secondo la direzione della retta di equazione $2x - y = 0$.

2. (a) In quale direzione orientata si dovrebbe procedere per ottenere la massima velocità di crescita della funzione $z = f(x, y) = 3x - 4y + 26$?
(b) Qual è la velocità istantanea di variazione di f riferita all’unità di lunghezza in questa direzione?
3. La temperatura T in un punto (x, y) su una lastra di metallo è data da

$$T(x, y) = 200 e^{-x^2 - 3y^2}$$

dove T è misurata in °C, e x, y in metri.

- (a) Trovare la velocità di incremento della temperatura nel punto $P(2, -1)$ nella direzione verso il punto $Q(3, -3)$.
(b) In quale direzione si ha il massimo incremento in P ?
(c) Trovare la massima velocità di incremento in P .
(d) Trovare massimi e minimi della funzione $T(x, y)$.

4. Trovare il minimo della funzione

$$z = 9x^2 - 6xy + 2y^2 - 6y + 11.$$

5. Trovare un massimo relativo della funzione $z = e^{-(x^2+y^2)}$.
È tale massimo anche il massimo assoluto?

6. Data la funzione $z = f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$,

- (a) determinare i punti stazionari di f ;
(b) trovare i minimi e i massimi locali di f diversi da $(0, 0)$;
(c) decidere se f ha un minimo o massimo locale nel punto $(0, 0)$.

7. Data la funzione $f(x, y) = x^2$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

- (a) disegnare le curve di livello per le quote 0 e 1;
(b) calcolare la derivata direzionale nel punto $(1, 0)$ in direzione dell’asse delle x negative;
(c) disegnare il grafico di f .

8. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^3 - xy, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

- (a) Disegnare le curve di livello della funzione f per le quote $-1, 0$ e 1 .
(b) Determinare i punti stazionari della funzione f e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.
(c) In quali direzioni la derivata direzionale della funzione f nel punto $(0, 1)$ si annulla e in quali direzioni essa assume il massimo e il minimo? Determinare il valore di tale massimo e minimo.