

1. Descrivere e rappresentare le curve di livello per ognuna delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = 4xy$ ,                      (b)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1)$ .

2. Si consideri la superficie di equazione  $z - 3 = +\sqrt{6 - (x - 1)^2 - (y - 2)^2}$ .

(a) Si dimostri che si tratta di una porzione di sfera, e se ne trovino centro e raggio.

(b) Si trovi l'equazione del piano tangente alla sfera nel punto di coordinate  $(2, 3, 5)$ .

3. Trovare le derivate parziali di primo e secondo ordine delle seguenti funzioni:

(a)  $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ ,                      (b)  $Q(v, w) = w \cdot \ln v$ ,

(c)  $S(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ,                      (d)  $\Phi(s, t) = se^{at}$ .

4. Il diametro di un cilindro circolare retto misura  $6,0 \pm 0,006$  cm mentre la sua altezza misura  $4,0 \pm 0,002$  cm. Qual è (a) il massimo errore possibile e (b) il massimo errore percentuale che si commette nel calcolo del volume? (Si usi il differenziale totale per approssimare l'errore sul volume.)

5. Calcolare la derivata direzionale della funzione

$$z = f(x, y) = (x + 2y - 2)^2 + 3(y - 2x)^2$$

nel punto  $P = (3, 6)$  secondo la direzione della retta di equazione  $2x - y = 0$ .

6. (a) In quale direzione orientata si dovrebbe procedere per ottenere la massima velocità di crescita della funzione  $z = f(x, y) = 3x - 4y + 26$ ?

(b) Qual è la velocità istantanea di variazione di  $f$  riferita all'unità di lunghezza in questa direzione?

7. La temperatura  $T$  in un punto  $(x, y)$  su una lastra di metallo è data da

$$T(x, y) = 200 e^{-x^2 - 3y^2}$$

dove  $T$  è misurata in °C, e  $x, y$  in metri.

(a) Trovare la velocità di incremento della temperatura nel punto  $P(2, -1)$  nella direzione verso il punto  $Q(3, -3)$ .

(b) In quale direzione si ha il massimo incremento in  $P$ ?

(c) Trovare la massima velocità di incremento in  $P$ .

(d) Trovare massimi e minimi della funzione  $T(x, y)$ .

8. Trovare il minimo della funzione

$$z = 9x^2 - 6xy + 2y^2 - 6y + 11.$$

9. Trovare un massimo relativo della funzione  $z = e^{-(x^2+y^2)}$ .  
È tale massimo anche il massimo assoluto?
10. Data la funzione  $z = f(x, y) = x^3 - y^3 - 3xy$ ,
- (a) determinare i punti stazionari di  $f$ ;
  - (b) trovare i minimi e i massimi locali di  $f$  diversi da  $(0, 0)$ ;
  - (c) decidere se  $f$  ha un minimo o massimo locale nel punto  $(0, 0)$ .
11. Data la funzione  $f(x, y) = x^2$ ,  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,
- (a) disegnare le curve di livello per le quote 0 e 1;
  - (b) calcolare la derivata direzionale nel punto  $(1, 0)$  in direzione dell'asse delle  $x$  negative;
  - (c) disegnare il grafico di  $f$ .
12. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^3 - xy, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

- (a) Disegnare le curve di livello della funzione  $f$  per le quote  $-1$ ,  $0$  e  $1$ .
- (b) Determinare i punti stazionari della funzione  $f$  e classificarli, ossia dire se sono punti di massimo, minimo o punti di sella.
- (c) In quali direzioni la derivata direzionale della funzione  $f$  nel punto  $(0, 1)$  si annulla e in quali direzioni essa assume il massimo e il minimo? Determinare il valore di tale massimo e minimo.