C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 15. 1. 2009

1. (a) Qual è il numero dei possibili pentapeptidi (sequenze aminoacidiche di lunghezza 5) che si possono formare dai 20 aminoacidi ordinari?

   (b) Quanti di tali pentapeptidi contengono l'aminoacido glicina?

2. Calcolare (a) $\displaystyle\int_{-1}^{-10} \frac{3t^3+1}{t}\,dt$, (b) $\displaystyle\int_{1}^{10} x\log_{10} x\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos(4x+\pi)\,dx$.

3. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ dei seguenti problemi di Cauchy:

   (a) $\begin{cases} 4y'' + 4y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4\,. \end{cases}$

   (c) Trovare il limite $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} y(x)$.

4. Sia $v = v(t)$ la velocità (che dipende dal tempo t) di un corpo di massa m in caduta libera sottoposto alla resistenza viscosa di un fluido. Si sperimenta che la resistenza del fluido produce sul corpo una forza circa uguale a $-\alpha v(t)$, dove α è una costante positiva che dipende, fra le altre cose, dalla forma del corpo e dal fluido in cui esso si muove. Dalla legge di Newton si ottiene $mv'(t) = mg - \alpha v(t)$ (dove $g > 0$ è la costante di accelerazione gravitazionale della terra).

   (a) Si trovi la soluzione $v = v(t)$ del problema di Cauchy
   $$\begin{cases} mv'(t) = mg - \alpha v(t) \\ v(0) = v_0\,. \end{cases}$$

   (b) Si calcoli la velocità limite $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} v(t)$ e si dica se essa dipende dalla velocità iniziale v_0.

5. Si consideri la funzione
   $$z = f(x,y) = \sqrt{4-(x-1)^2-y^2}, \quad \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 \le 4\}$$
   e se ne determinino:

   (a) il gradiente nel punto $(1,0)$;

   (b) la derivata direzionale nel punto $(2,1)$ in direzione dell'asse x negativo;

   (c) le derivate direzionali nel punto $(2,1)$ in direzione della retta di equazione $3x + y = 0$;

   (d) la curva di livello per la quota $z = 0$ (disegno!);

   (e) l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,0,2)$;

   (f) i massimi relativi.

6. Determinare e classificare i quattro punti stazionari della funzione
   $$f(x,y) = 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - 9y, \quad (x,y)\in\mathbf{R}^2.$$