

1. È noto che la distanza s percorsa da un corpo in caduta libera (senza attrito d'aria e con velocità iniziale 0) è $s(t) = \frac{g}{2}t^2$, dove t è il tempo e $g \approx 9,81 \text{ ms}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità. Supponiamo che un corpo venga lasciato cadere da una quota di 30 m. Calcolate:

- (a) il tempo di caduta, (b) la velocità finale, (c) la velocità media.
 (d) In quale istante la velocità del corpo è uguale alla velocità media?

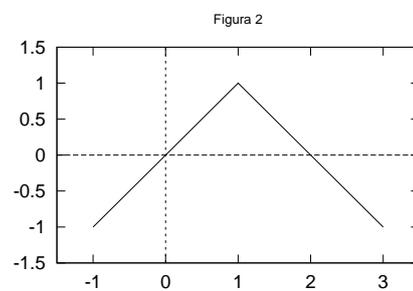
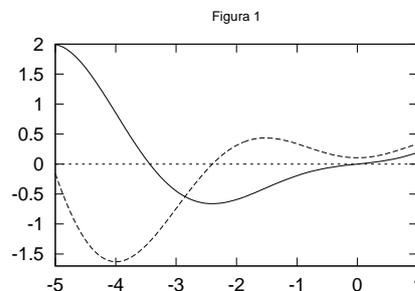
2. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni e controllare i risultati ottenuti con il software REDUCE (<http://reduce-algebra.sourceforge.net/>).

Nota bene: La derivata si calcola con il comando `df(q * t^(-2), t)`; e premendo il tasto INVIO o ENTER. Il logaritmo di x in base di 10 è `log x/log 10`, la radice quadrata di x è `sqrt x`.

- (a) $U(t) = qt^{-2}$, (b) $y = x \cdot \cos x$, (c) $R(s) = \sqrt{\log_{10} s}$, (d) $R(s) = \frac{1}{a - bs}$
 (e) $y = \frac{x+1}{x-2}$, (f) $y = x \cdot \log_{10} x$, (g) $v(t) = (3t-1)^{-2}$, (h) $f(x) = \sqrt{(\ln x)^2}$.

Dire se la funzione di (h) è derivabile anche nel punto $x = 1$ (motivare la risposta) e, in caso affermativo, calcolare $f'(1)$.

3. In fig. 1 sono riportati i grafici di due funzioni di cui una è la derivata dell'altra. È f (curva tratteggiata) la derivata o g (curva continua)?



4. Sia f la funzione f il cui grafico è rappresentato in fig. 2.

- (a) La funzione f è derivabile?
 (b) Trovate un'espressione analitica per la f .

5. Calcolare le derivate sia delle funzioni che delle funzioni inverse.

- (a) $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{2}{1 + e^{-3x}}$, (b) $f: \mathbf{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{3\}$, $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$,
 (c) $f: \{x \in \mathbf{R} \mid x > -1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \ln(1+x)$.

6. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per calcolare approssimativamente $1,002^{-1}$ e $0,997^{-1}$ e confrontare i risultati con i valori precisi.

7. Se il pH è stato determinato con una accuratezza di un centesimo di pH, con quale errore (relativo) percentuale si conosce a_{H^+} ? (Si usi il differenziale della funzione $y = f(x) = -\log_{10} x$ e il valore $\log_{10} e \approx 0,4$.)

8. Calcolare il raggio spettrale e la norma spettrale della matrice $\mathbf{A} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ a mano e con Octave.

9. (Quarteroni-Saleri, pp. 159–162) Si consideri il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ x - 4y = -7 \end{cases}$$

- (a) La matrice del sistema è a dominanza diagonale stretta per righe? Si possono trarre delle conclusioni sulla convergenza del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel?
- (b) Partendo dal vettore iniziale $(x_0, y_0) = (0, 0)$, si calcolino (a mano) le prime due iterate del metodo di Jacobi e del metodo di Gauss-Seidel e si confrontino i risultati ottenuti con la soluzione esatta del sistema.