

1. Calcolare (anche con REDUCE, ad esempio (d) `limit((sin x)^x,x,0)`;  
 (f) `limit(((x^2+3*x)/(x^2+1))^x,x,infinity)`);

(a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 + \cos \pi x}{x^2 - 2x + 1}$ ,      (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x}$ ,      (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ ,  
 (d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x$ ,      (e)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$ ,      (f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 1} \right)^x$ .

2. Calcolare la serie di Taylor centrata in  $x_0 = 2$  della funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

e verificarla con REDUCE: `f := x^4 - 2*x^3 + 2*x^2 - 7*x + 1;`  
`taylorstandard(taylor(f,x,2,n));` dove al posto della  $n$  (= grado del polinomio di Taylor) deve essere inserito un numero. Quale?

3. Sviluppare in serie di Taylor centrata in  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  la funzione  $f(x) = \sin x$ .
4. (a) Calcolare un'approssimazione della soluzione dell'equazione  $\cos x = x$  sostituendo la funzione  $\cos x$  con il suo polinomio di Taylor  $T_2(x) = T_3(x)$  di centro 0. REDUCE: `taylorstandard(taylor(cos x,x,0,2));`  
 (b) Valutare l'errore che si commette approssimando  $f(x) = \cos x$  con il polinomio  $T_3(x)$ , per  $0 < x < 1$ , cioè trovare una maggiorazione del valore assoluto del resto secondo Lagrange  $R_3(x)$ ,  $0 < x < 1$ .

5. Determinare i minimi e massimi relativi e i punti di flesso delle funzioni:

(a)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ ;      (b)  $f(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ ,  $x \neq 0$ ;  
 (c)  $f(x) = \sqrt{x} \ln \frac{1}{x}$ ,  $x > 0$ ;      (d)  $f(x) = 2 \cos x + \cos 2x$ .

6. L'energia potenziale  $V(r)$  di una molecola biatomica dipende dalla distanza  $r$  dei due atomi e può essere modellato con la funzione di Morse

$$V(r) = D(1 - e^{-a(r-r_0)})^2,$$

dove  $r_0$  è la distanza all'equilibrio,  $D$  è l'energia di dissociazione e  $a$  è una costante che controlla la larghezza del potenziale. Per il NaCl si hanno  $D = 3,7$  eV,  $r_0 = 2,5$  Å,  $a = 0,6$  Å<sup>-1</sup>.

Nota: 1 eV (elettronvolt) =  $1,60217646 \cdot 10^{-19}$  J, 1 Å (ångström) =  $10^{-10}$  m.

- (a) Calcolare  $\lim_{r \rightarrow +\infty} V(r)$ .  
 (b) Trovare il minimo e il punto di flesso di  $V(r)$ .  
 (c) Calcolare il polinomio di Taylor  $T_2(r)$  di  $V(r)$  scegliendo come centro  $r_0$ .  
 (d) Attorno al suo minimo si può approssimare l'energia potenziale con una parabola, cioè  $V(r) \approx \frac{1}{2}k(r-r_0)^2$ , dove  $k$  è la costante di forza del legame tra i due atomi. Calcolare  $k$  (in Jm<sup>-2</sup>) di NaCl usando  $T_2(r)$ .  
 (e) Rappresentare approssimativamente in un grafico l'andamento del potenziale di Morse di NaCl, indicando esplicitamente sul grafico la scala e i valori dei parametri.