C.d.L. in Chimica e Tecnologie per l'Ambiente e per i Materiali, curriculum Ambiente, Energia, Rifiuti 13. 01. 2012

1. (Bramanti-Pagani-Salsa, p. 122, Esercizio 59) Determinare una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ composta di autovettori della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2, \quad x > -1,$

   (a) stabilire se la funzione è monotona crescente o monotona decrescente;

   (b) determinare gli asintoti;

   (c) disegnare il grafico;

   (d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0, -1)$;

   (e) calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale 0.

3. Calcolare l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x)^4 \operatorname{sen} x \, dx$$

   (usando la sostituzione $u = 1 - \cos x$) e calcolarlo approssimativamente con la formula semplice di Simpson.

4. In una reazione chimica A + B $\longrightarrow$ C del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x) \cdot ([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

   dove k (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 3$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 2$, $[\mathrm{B}]_0 = 3$.

5. Data la funzione $f(x, y) = x^2 + xy, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2$, calcolare

   (a) il gradiente di f nel punto $(1, 1)$;

   (b) la derivata direzionale di f nel punto $(1, 1)$ in direzione dell'asse delle y negative;

   (c) il punto stazionario di f e classificarlo;

   (d) $\displaystyle\iint_T (x^2+xy)\, dx\, dy$, dove $T \subset \mathbf{R}^2$ è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$.