

La distribuzione t

Federico Plazzi

7 Novembre 2015

Popolazione e campioni

Popolazione e campioni

Definizioni ed assunzioni di partenza

- ▶ **Campione:** l'insieme di individui che abbiamo potuto osservare.

Popolazione e campioni

Definizioni ed assunzioni di partenza

- ▶ **Campione:** l'insieme di individui che abbiamo potuto osservare.
- ▶ **Popolazione:** l'insieme, più vasto, di individui, da cui il campione è tratto, che è generalmente l'obiettivo del nostro lavoro.

Popolazione e campioni

Definizioni ed assunzioni di partenza

- ▶ **Campione:** l'insieme di individui che abbiamo potuto osservare.
- ▶ **Popolazione:** l'insieme, più vasto, di individui, da cui il campione è tratto, che è generalmente l'obiettivo del nostro lavoro.
- ▶ **Supponiamo innanzitutto che i valori della nostra variabile considerati su tutta la popolazione siano distribuiti in modo normale.**

Popolazione e campioni

Definizioni ed assunzioni di partenza

- ▶ **Campione:** l'insieme di individui che abbiamo potuto osservare.
- ▶ **Popolazione:** l'insieme, più vasto, di individui, da cui il campione è tratto, che è generalmente l'obiettivo del nostro lavoro.
- ▶ **Supponiamo innanzitutto che i valori della nostra variabile considerati su tutta la popolazione siano distribuiti in modo normale.**
- ▶ **Diciamo anche che il nostro campione è estratto dalla popolazione in modo casuale.**

Popolazione e campioni

Definizioni ed assunzioni di partenza

- ▶ **Campione:** l'insieme di individui che abbiamo potuto osservare.
- ▶ **Popolazione:** l'insieme, più vasto, di individui, da cui il campione è tratto, che è generalmente l'obiettivo del nostro lavoro.
- ▶ **Supponiamo innanzitutto che i valori della nostra variabile considerati su tutta la popolazione siano distribuiti in modo normale.**
- ▶ **Diciamo anche che il nostro campione è estratto dalla popolazione in modo casuale.**
- ▶ Chiamiamo μ_{pop} , σ_{pop}^2 e σ_{pop} rispettivamente media, varianza e deviazione standard *di tutta la popolazione*

Popolazione e campioni

Definizioni ed assunzioni di partenza

- ▶ **Campione:** l'insieme di individui che abbiamo potuto osservare.
- ▶ **Popolazione:** l'insieme, più vasto, di individui, da cui il campione è tratto, che è generalmente l'obiettivo del nostro lavoro.
- ▶ **Supponiamo innanzitutto che i valori della nostra variabile considerati su tutta la popolazione siano distribuiti in modo normale.**
- ▶ **Diciamo anche che il nostro campione è estratto dalla popolazione in modo casuale.**
- ▶ Chiamiamo μ_{pop} , σ_{pop}^2 e σ_{pop} rispettivamente media, varianza e deviazione standard *di tutta la popolazione*
- ▶ Chiamiamo infine N la *taglia del campione*.

**Cosa posso dire della
popolazione a partire dal
campione che osservo?**

Cosa posso dire della popolazione a partire dal campione che osservo?

Per rispondere, dobbiamo per prima cosa capire quali sono i legami tra campioni e popolazione...

Legami tra campioni e popolazione

Come procedere?

Estraiamo molti (diciamo 5000, che è il limite di R per eseguire un test di Shapiro-Wilk) campioni di taglia N .

Legami tra campioni e popolazione

Come procedere?

Estraiamo molti (diciamo 5000, che è il limite di R per eseguire un test di Shapiro-Wilk) campioni di taglia N .

Risultato fondamentale

Le medie campionarie ($\mu_{\bar{X}}$) di un elevato numero di campioni estratti dalla nostra popolazione si distribuiscono in modo **normale!**

Distribuzione delle medie campionarie

Distribuzione delle medie campionarie

Media delle medie campionarie

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_{pop} \quad (1)$$

Distribuzione delle medie campionarie

Media delle medie campionarie

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_{pop} \quad (1)$$

Varianza delle medie campionarie

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_{pop}^2}{N} \quad (2)$$

Distribuzione delle medie campionarie

Media delle medie campionarie

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_{pop} \quad (1)$$

Varianza delle medie campionarie

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_{pop}^2}{N} \quad (2)$$

Deviazione standard delle medie campionarie (*errore standard*)

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sigma_{pop}^2}{N}} = \frac{\sigma_{pop}}{\sqrt{N}} \quad (3)$$

Torniamo alla devziata normale

Se le medie campionarie si distribuiscono in modo normale, possiamo usare la devziata normale (Z), che già conosciamo, per verificare se la media del nostro campione somiglia a quella di tutti gli altri concepibili campioni o se si tratta di un valore estremo.

Torniamo alla devziata normale

Se le medie campionarie si distribuiscono in modo normale, possiamo usare la devziata normale (Z), che già conosciamo, per verificare se la media del nostro campione somiglia a quella di tutti gli altri concepibili campioni o se si tratta di un valore estremo.

In altre parole, possiamo usare Z per rispondere alla domanda:
il nostro campione appartiene o no ad una certa popolazione?

Torniamo alla devziata normale

Se le medie campionarie si distribuiscono in modo normale, possiamo usare la devziata normale (Z), che già conosciamo, per verificare se la media del nostro campione somiglia a quella di tutti gli altri concepibili campioni o se si tratta di un valore estremo.

In altre parole, possiamo usare Z per rispondere alla domanda:
il nostro campione appartiene o no ad una certa popolazione?

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (4)$$

Costruzione e stima di Z

- ▶ In questo caso, la nostra X sarà la nostra media campionaria, \bar{X} .

Costruzione e stima di Z

- ▶ In questo caso, la nostra X sarà la nostra media campionaria, \bar{X} .
- ▶ La media della distribuzione è la media della distribuzione delle medie campionarie, ossia, per la (1), la media di popolazione, μ_{pop} .

Costruzione e stima di Z

- ▶ In questo caso, la nostra X sarà la nostra media campionaria, \bar{X} .
- ▶ La media della distribuzione è la media della distribuzione delle medie campionarie, ossia, per la (1), la media di popolazione, μ_{pop} .
- ▶ Cosa possiamo dire dell'errore standard della popolazione a partire dal campione?

Stima della varianza di popolazione

- ▶ Con l'esame di un elevato numero di campioni, si vede che

$$\sigma^2 = \sigma_{pop}^2 \cdot \frac{N-1}{N} \quad (5)$$

Stima della varianza di popolazione

- ▶ Con l'esame di un elevato numero di campioni, si vede che

$$\sigma^2 = \sigma_{pop}^2 \cdot \frac{N-1}{N} \quad (5)$$

- ▶ Perciò

$$\hat{\sigma}_{pop}^2 = \sigma^2 \cdot \frac{N}{N-1} \quad (6)$$

Stima della varianza di popolazione

- ▶ Con l'esame di un elevato numero di campioni, si vede che

$$\sigma^2 = \sigma_{pop}^2 \cdot \frac{N-1}{N} \quad (5)$$

- ▶ Perciò

$$\hat{\sigma}_{pop}^2 = \sigma^2 \cdot \frac{N}{N-1} \quad (6)$$

- ▶ Sostituendo con la definizione di varianza,

$$\hat{\sigma}_{pop}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{N} \cdot \frac{N}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{N-1} \quad (7)$$

Il t di Student

- ▶ Abbiamo così terminato la costruzione del nostro Z , che però, visti i diversi “rimaneggiamenti” che si sono resi necessari, non chiamiamo più Z , ma t :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\hat{\sigma}_{pop}}{\sqrt{N}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\sqrt{N-1}\sqrt{N}}} \quad (8)$$

Il t di Student

- ▶ Abbiamo così terminato la costruzione del nostro Z , che però, visti i diversi “rimaneggiamenti” che si sono resi necessari, non chiamiamo più Z , ma t :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\hat{\sigma}_{pop}}{\sqrt{N}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\sqrt{N-1}\sqrt{N}}} \quad (8)$$

- ▶ **Sembra incredibile, ma la distribuzione di t si può studiare, esattamente come la distribuzione normale di Z !**

Il t di Student

- ▶ Abbiamo così terminato la costruzione del nostro Z , che però, visti i diversi “rimaneggiamenti” che si sono resi necessari, non chiamiamo più Z , ma t :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\hat{\sigma}_{pop}}{\sqrt{N}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\sqrt{N-1}\sqrt{N}}} \quad (8)$$

- ▶ **Sembra incredibile, ma la distribuzione di t si può studiare, esattamente come la distribuzione normale di Z !**
- ▶ La distribuzione di t dipende anche dai *gradi di libertà*, pari ad $N - 1$.

Il t di Student

- ▶ Abbiamo così terminato la costruzione del nostro Z , che però, visti i diversi “rimaneggiamenti” che si sono resi necessari, non chiamiamo più Z , ma t :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\hat{\sigma}_{pop}}{\sqrt{N}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\sqrt{N-1}\sqrt{N}}} \quad (8)$$

- ▶ **Sembra incredibile, ma la distribuzione di t si può studiare, esattamente come la distribuzione normale di Z !**
- ▶ La distribuzione di t dipende anche dai *gradi di libertà*, pari ad $N - 1$.
- ▶ H_0 : il campione *appartiene* alla popolazione $\Rightarrow t = 0$

Il t di Student

- ▶ Abbiamo così terminato la costruzione del nostro Z , che però, visti i diversi “rimaneggiamenti” che si sono resi necessari, non chiamiamo più Z , ma t :

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\hat{\sigma}_{pop}}{\sqrt{N}}} = \frac{\bar{X} - \mu_{pop}}{\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}}{\sqrt{N-1}\sqrt{N}}} \quad (8)$$

- ▶ **Sembra incredibile, ma la distribuzione di t si può studiare, esattamente come la distribuzione normale di Z !**
- ▶ La distribuzione di t dipende anche dai *gradi di libertà*, pari ad $N - 1$.
- ▶ H_0 : il campione *appartiene* alla popolazione $\Rightarrow t = 0$
- ▶ H_1 : il campione *non appartiene* alla popolazione $\Rightarrow t \neq 0$

TABLE A.2

t Distribution: Critical Values of t

<i>Degrees of freedom</i>	<i>Two-tailed test: One-tailed test:</i>	<i>Significance level</i>					
		10% 5%	5% 2.5%	2% 1%	1% 0.5%	0.2% 0.1%	0.1% 0.05%
1		6.314	12.706	31.821	63.657	318.309	636.619
2		2.920	4.303	6.965	9.925	22.327	31.599
3		2.353	3.182	4.541	5.841	10.215	12.924
4		2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5		2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6		1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7		1.894	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8		1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9		1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10		1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11		1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12		1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13		1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14		1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15		1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16		1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17		1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18		1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19		1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20		1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21		1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22		1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23		1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.768
24		1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25		1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26		1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27		1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28		1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29		1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30		1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
32		1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34		1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36		1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38		1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40		1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
42		1.682	2.018	2.418	2.698	3.296	3.538
44		1.680	2.015	2.414	2.692	3.286	3.526
46		1.679	2.013	2.410	2.687	3.277	3.515
48		1.677	2.011	2.407	2.682	3.269	3.505
50		1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60		1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
70		1.667	1.994	2.381	2.648	3.211	3.435
80		1.664	1.990	2.374	2.639	3.195	3.416
90		1.662	1.987	2.368	2.632	3.183	3.402
100		1.660	1.984	2.364	2.626	3.174	3.390
120		1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
150		1.655	1.976	2.351	2.609	3.145	3.357
200		1.653	1.972	2.345	2.601	3.131	3.340
300		1.650	1.968	2.339	2.592	3.118	3.323
400		1.649	1.966	2.336	2.588	3.111	3.315
500		1.648	1.965	2.334	2.586	3.107	3.310
600		1.647	1.964	2.333	2.584	3.104	3.307
∞		1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

Campioni appaiati

Modifiche del test per due campioni appaiati

- ▶ Due campioni si dicono *appaiati* se l' i -esimo individuo del primo campione deve per forza essere confrontato con l' i -esimo individuo del secondo campione.

Campioni appaiati

Modifiche del test per due campioni appaiati

- ▶ Due campioni si dicono *appaiati* se l' i -esimo individuo del primo campione deve per forza essere confrontato con l' i -esimo individuo del secondo campione.
- ▶ Un tipico caso di campioni appaiati si ha con gli esperimenti “prima-dopo”, in cui cioè una certa variabile viene misurata prima e dopo un certo trattamento ed è importante quindi sapere le reazioni dei singoli individui.

Campioni appaiati

Modifiche del test per due campioni appaiati

- ▶ Due campioni si dicono *appaiati* se l' i -esimo individuo del primo campione deve per forza essere confrontato con l' i -esimo individuo del secondo campione.
- ▶ Un tipico caso di campioni appaiati si ha con gli esperimenti “prima-dopo”, in cui cioè una certa variabile viene misurata prima e dopo un certo trattamento ed è importante quindi sapere le reazioni dei singoli individui.
- ▶ Questo permette di eliminare differenze individuali preesistenti al trattamento e non legate all'esperimento.

Campioni appaiati

Modifiche del test per due campioni appaiati

- ▶ Due campioni si dicono *appaiati* se l' i -esimo individuo del primo campione deve per forza essere confrontato con l' i -esimo individuo del secondo campione.
- ▶ Un tipico caso di campioni appaiati si ha con gli esperimenti “prima-dopo”, in cui cioè una certa variabile viene misurata prima e dopo un certo trattamento ed è importante quindi sapere le reazioni dei singoli individui.
- ▶ Questo permette di eliminare differenze individuali preesistenti al trattamento e non legate all'esperimento.
- ▶ In questo caso, per eseguire il test t non si considerano come due campioni separati, ma si testa il *campione delle differenze*:

Campioni appaiati

Modifiche del test per due campioni appaiati

- ▶ Due campioni si dicono *appaiati* se l' i -esimo individuo del primo campione deve per forza essere confrontato con l' i -esimo individuo del secondo campione.
- ▶ Un tipico caso di campioni appaiati si ha con gli esperimenti “prima-dopo”, in cui cioè una certa variabile viene misurata prima e dopo un certo trattamento ed è importante quindi sapere le reazioni dei singoli individui.
- ▶ Questo permette di eliminare differenze individuali preesistenti al trattamento e non legate all'esperimento.
- ▶ In questo caso, per eseguire il test t non si considerano come due campioni separati, ma si testa il *campione delle differenze*:
- ▶ per ogni individuo si calcola quindi la differenza D tra la variabile misurata nel primo campione e quella misurata nel secondo.

Campioni appaiati

Modifiche del test per due campioni appaiati

- ▶ L'ipotesi nulla è che la media delle differenze individuali sia 0:

$$H_0 : \bar{D} = 0 \quad (9)$$

Campioni appaiati

Modifiche del test per due campioni appaiati

- ▶ L'ipotesi nulla è che la media delle differenze individuali sia 0:

$$H_0 : \bar{D} = 0 \quad (9)$$

- ▶ In questo caso, quindi, la media di popolazione è 0 e la varianza che ci serve è quella relativa alle differenze,

$$\hat{\sigma}_D^2$$

Campioni appaiati

Modifiche del test per due campioni appaiati

- ▶ L'ipotesi nulla è che la media delle differenze individuali sia 0:

$$H_0 : \bar{D} = 0 \quad (9)$$

- ▶ In questo caso, quindi, la media di popolazione è 0 e la varianza che ci serve è quella relativa alle differenze,

$$\hat{\sigma}_D^2$$

- ▶ Perciò, possiamo calcolare t come

$$t = \frac{\bar{D} - 0}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_D^2}{N}}} = \frac{\bar{D}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_D^2}{N}}} \quad (10)$$

con $N - 1$ gradi di libertà.

Coppie di campioni

- ▶ Supponiamo ora di estrarre *coppie* di campioni e di confrontarli a due a due.

Coppie di campioni

- ▶ Supponiamo ora di estrarre *coppie* di campioni e di confrontarli a due a due.
- ▶ Chiamiamo N_a la dimensione del primo campione ed N_b la dimensione del secondo.

Coppie di campioni

- ▶ Supponiamo ora di estrarre *coppie* di campioni e di confrontarli a due a due.
- ▶ Chiamiamo N_a la dimensione del primo campione ed N_b la dimensione del secondo.
- ▶ Chiamiamo Δ la differenza tra le medie di due campioni. Possiamo studiare la distribuzione di Δ ed avremo quindi μ_Δ , σ_Δ^2 e σ_Δ .

Legami tra differenze di coppie di campioni e popolazione

Legami tra differenze di coppie di campioni e popolazione

Media delle differenze

$$\mu_{\Delta} = 0 \quad (11)$$

Legami tra differenze di coppie di campioni e popolazione

Media delle differenze

$$\mu_{\Delta} = 0 \quad (11)$$

Varianza delle differenze

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{\sigma_{pop}^2}{N_a} + \frac{\sigma_{pop}^2}{N_b} \quad (12)$$

Legami tra differenze di coppie di campioni e popolazione

Media delle differenze

$$\mu_{\Delta} = 0 \quad (11)$$

Varianza delle differenze

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{\sigma_{pop}^2}{N_a} + \frac{\sigma_{pop}^2}{N_b} \quad (12)$$

Deviazione standard delle differenze

$$\sigma_{\Delta} = \sqrt{\frac{\sigma_{pop}^2}{N_a} + \frac{\sigma_{pop}^2}{N_b}} \quad (13)$$

t di Student per due campioni

Il nostro t , quindi, sarà in questo caso

$$t = \frac{\Delta - \mu_{\Delta}}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta - 0}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_{pop}^2}{N_a} + \frac{\sigma_{pop}^2}{N_b}}} \quad (14)$$

- ▶ Di nuovo, possiamo stimare la varianza di popolazione a partire da quelle campionarie ed usare le nostre stime per il calcolo di t .

t di Student per due campioni

Il nostro t , quindi, sarà in questo caso

$$t = \frac{\Delta - \mu_{\Delta}}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta - 0}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_{pop}^2}{N_a} + \frac{\sigma_{pop}^2}{N_b}}} \quad (14)$$

- ▶ Di nuovo, possiamo stimare la varianza di popolazione a partire da quelle campionarie ed usare le nostre stime per il calcolo di t .
- ▶ **Ancora una volta, la distribuzione di t si può studiare, anche se adesso abbiamo due gradi di libertà di cui tenere conto!**

t di Student per due campioni

Il nostro t , quindi, sarà in questo caso

$$t = \frac{\Delta - \mu_{\Delta}}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta - 0}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_{pop}^2}{N_a} + \frac{\sigma_{pop}^2}{N_b}}} \quad (14)$$

- ▶ Di nuovo, possiamo stimare la varianza di popolazione a partire da quelle campionarie ed usare le nostre stime per il calcolo di t .
- ▶ **Ancora una volta, la distribuzione di t si può studiare, anche se adesso abbiamo due gradi di libertà di cui tenere conto!**
- ▶ In questo caso, quindi, il test ci dice se due campioni appartengono o no alla stessa popolazione:

t di Student per due campioni

Il nostro t , quindi, sarà in questo caso

$$t = \frac{\Delta - \mu_{\Delta}}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta - 0}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_{pop}^2}{N_a} + \frac{\sigma_{pop}^2}{N_b}}} \quad (14)$$

- ▶ Di nuovo, possiamo stimare la varianza di popolazione a partire da quelle campionarie ed usare le nostre stime per il calcolo di t .
- ▶ **Ancora una volta, la distribuzione di t si può studiare, anche se adesso abbiamo due gradi di libertà di cui tenere conto!**
- ▶ In questo caso, quindi, il test ci dice se due campioni appartengono o no alla stessa popolazione:
- ▶ H_0 : i due campioni *appartengono* alla stessa popolazione
 $\Rightarrow t = 0$

t di Student per due campioni

Il nostro t , quindi, sarà in questo caso

$$t = \frac{\Delta - \mu_{\Delta}}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta - 0}{\sigma_{\Delta}} = \frac{\Delta}{\sqrt{\frac{\sigma_{pop}^2}{N_a} + \frac{\sigma_{pop}^2}{N_b}}} \quad (14)$$

- ▶ Di nuovo, possiamo stimare la varianza di popolazione a partire da quelle campionarie ed usare le nostre stime per il calcolo di t .
- ▶ **Ancora una volta, la distribuzione di t si può studiare, anche se adesso abbiamo due gradi di libertà di cui tenere conto!**
- ▶ In questo caso, quindi, il test ci dice se due campioni appartengono o no alla stessa popolazione:
- ▶ H_0 : i due campioni *appartengono* alla stessa popolazione
 $\Rightarrow t = 0$
- ▶ H_1 : i due campioni *non appartengono* alla stessa popolazione
 $\Rightarrow t \neq 0$