Test non parametrici

Federico Plazzi

19 Novembre 2015

Cos'è un test non parametrico?

Cos'è un test non parametrico?

Idea di base

- **Distribuzione normale**: è governata solo dalla sua media e dalla sua deviazione standard, ossia da due *parametri*. Diciamo quindi che un test che si basa su una distribuzione normale è un test *parametrico*.

Cos'è un test non parametrico?

Idea di base

- **Distribuzione normale**: è governata solo dalla sua media e dalla sua deviazione standard, ossia da due *parametri*. Diciamo quindi che un test che si basa su una distribuzione normale è un test *parametrico*.
- Ad esempio, il test t è un test parametrico!

Cos'è un test non parametrico?

Idea di base

- **Distribuzione normale**: è governata solo dalla sua media e dalla sua deviazione standard, ossia da due *parametri*. Diciamo quindi che un test che si basa su una distribuzione normale è un test *parametrico*.
- Ad esempio, il test t è un test parametrico!
- **Ma cosa succede quando non possiamo sapere se la distribuzione della popolazione non è normale o non ne siamo sicuri?**

Cos'è un test non parametrico?

Idea di base

- **Distribuzione normale**: è governata solo dalla sua media e dalla sua deviazione standard, ossia da due *parametri*. Diciamo quindi che un test che si basa su una distribuzione normale è un test *parametrico*.
- Ad esempio, il test t è un test parametrico!
- **Ma cosa succede quando non possiamo sapere se la distribuzione della popolazione non è normale o non ne siamo sicuri?**
- Il test t ha anche altre ipotesi: che il campione od i campioni siano estratti a caso ed indipendentemente dalla popolazione e che le rilevazioni siano, o possano essere, continue (delle altezze o dei pesi, per esempio, non dei voti o dei "vero/falso").

Cos'è un test non parametrico?

Idea di base

- **Distribuzione normale**: è governata solo dalla sua media e dalla sua deviazione standard, ossia da due *parametri*. Diciamo quindi che un test che si basa su una distribuzione normale è un test *parametrico*.
- Ad esempio, il test t è un test parametrico!
- **Ma cosa succede quando non possiamo sapere se la distribuzione della popolazione non è normale o non ne siamo sicuri?**
- Il test t ha anche altre ipotesi: che il campione od i campioni siano estratti a caso ed indipendentemente dalla popolazione e che le rilevazioni siano, o possano essere, continue (delle altezze o dei pesi, per esempio, non dei voti o dei "vero/falso").
- **Se queste condizioni non ci sono, useremo un test non parametrico!**

Wilcoxon signed-rank test

Wilcoxon signed-rank test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni appaiati od autoappaiati (per esempio, "prima-dopo"):

Wilcoxon signed-rank test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni appaiati od autoappaiati (per esempio, “prima-dopo”):
- si usa cioè quando voglio vedere se ci sono delle differenze significative tra due situazioni, individuo per individuo.

Wilcoxon signed-rank test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni appaiati od autoappaiati (per esempio, “prima-dopo”):
- si usa cioè quando voglio vedere se ci sono delle differenze significative tra due situazioni, individuo per individuo.
- Se la distribuzione della popolazione da cui provengono i campioni è normale, possiamo usare un test t per due campioni appaiati:

Wilcoxon signed-rank test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni appaiati od autoappaiati (per esempio, “prima-dopo”):
- si usa cioè quando voglio vedere se ci sono delle differenze significative tra due situazioni, individuo per individuo.
- Se la distribuzione della popolazione da cui provengono i campioni è normale, possiamo usare un test t per due campioni appaiati:
- usiamo cioè il test t per validare l’ipotesi nulla che le differenze individuo per individuo provengano da una popolazione con media $= 0$.

Wilcoxon signed-rank test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni appaiati od autoappaiati (per esempio, "prima-dopo"):
- si usa cioè quando voglio vedere se ci sono delle differenze significative tra due situazioni, individuo per individuo.
- Se la distribuzione della popolazione da cui provengono i campioni è normale, possiamo usare un test t per due campioni appaiati:
- usiamo cioè il test t per validare l'ipotesi nulla che le differenze individuo per individuo provengano da una popolazione con media $= 0$.
- Se però non siamo sicuri della normalità della popolazione, usiamo il signed-rank test di Wilcoxon.

La procedura

La procedura

1. Calcolo tutte le differenze Δ_{AB} tra campione A e campione B, individuo per individuo.

La procedura

1. Calcolo tutte le differenze Δ_{AB} tra campione A e campione B, individuo per individuo.
2. Passo al valore assoluto ($|\Delta_{AB}|$).

La procedura

1. Calcolo tutte le differenze Δ_{AB} tra campione A e campione B, individuo per individuo.
2. Passo al valore assoluto ($|\Delta_{AB}|$).
3. Assegno ad ogni differenza in valore assoluto il suo rango (*rank*) $r_{\Delta_{AB}}$, partendo dalla più piccola (escludendo gli zeri e mediando per i pareggi).

La procedura

1. Calcolo tutte le differenze Δ_{AB} tra campione A e campione B, individuo per individuo.
2. Passo al valore assoluto ($|\Delta_{AB}|$).
3. Assegno ad ogni differenza in valore assoluto il suo rango (*rank*) $r_{\Delta_{AB}}$, partendo dalla più piccola (escludendo gli zeri e mediando per i pareggi).
4. Associo ad ogni rango il segno della differenza originale (*signed-rank*).

La procedura

1. Calcolo tutte le differenze Δ_{AB} tra campione A e campione B, individuo per individuo.
2. Passo al valore assoluto ($|\Delta_{AB}|$).
3. Assegno ad ogni differenza in valore assoluto il suo rango (*rank*) $r_{\Delta_{AB}}$, partendo dalla più piccola (escludendo gli zeri e mediando per i pareggi).
4. Associo ad ogni rango il segno della differenza originale (*signed-rank*).
5. Sommo i ranghi con i loro segni:

La procedura

1. Calcolo tutte le differenze Δ_{AB} tra campione A e campione B, individuo per individuo.
2. Passo al valore assoluto ($|\Delta_{AB}|$).
3. Assegno ad ogni differenza in valore assoluto il suo rango (*rank*) $r_{\Delta_{AB}}$, partendo dalla più piccola (escludendo gli zeri e mediando per i pareggi).
4. Associo ad ogni rango il segno della differenza originale (*signed-rank*).
5. Sommo i ranghi con i loro segni:

$$W = \sum_{i=1}^{N} r_{i\Delta_{AB}} \qquad (1)$$

dove $r_{i\Delta_{AB}}$ è il rango con segno della differenza misurata per l'i-esimo individuo tra campione A e campione B ed N è la dimensione dei campioni.

ll test

Il test

Solito trucco. . .

- Ancora una volta, W si distribuisce in modo normale!

Il test

Solito trucco...

- Ancora una volta, W si distribuisce in modo normale!
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z per vedere dove sta il nostro W nella normale di tutti i W...

Il test

Solito trucco...

- Ancora una volta, W si distribuisce in modo normale!
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z per vedere dove sta il nostro W nella normale di tutti i W...
- $$\mu_W = 0 \tag{2}$$

Il test

Solito trucco...

- Ancora una volta, W si distribuisce in modo normale!
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z per vedere dove sta il nostro W nella normale di tutti i W...
- $$\mu_W = 0 \tag{2}$$
- $$\sigma_W = \sqrt{\frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}} \tag{3}$$

Il test

Solito trucco...

- Ancora una volta, W si distribuisce in modo normale!
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z per vedere dove sta il nostro W nella normale di tutti i W...
- $$\mu_W = 0 \tag{2}$$
- $$\sigma_W = \sqrt{\frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}} \tag{3}$$
- $$z = \frac{(W - \mu_W) \pm 0.5}{\sigma_W} = \frac{W \pm 0.5}{\sqrt{\frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}}} \tag{4}$$

Il test

Solito trucco...

- Ancora una volta, W si distribuisce in modo normale!
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z per vedere dove sta il nostro W nella normale di tutti i W...
- $$\mu_W = 0 \tag{2}$$
- $$\sigma_W = \sqrt{\frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}} \tag{3}$$
- $$z = \frac{(W - \mu_W) \pm 0.5}{\sigma_W} = \frac{W \pm 0.5}{\sqrt{\frac{N \cdot (N+1) \cdot (2N+1)}{6}}} \tag{4}$$
- ± 0.5 è una "correzione di continuità" e prende il segno meno se $(W - \mu_W) = W > 0$ e viceversa.

Test di Mann e Whitney

a.k.a. Wilcoxon rank-sum test

Test di Mann e Whitney

a.k.a. Wilcoxon rank-sum test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni indipendenti:

Test di Mann e Whitney

a.k.a. Wilcoxon rank-sum test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni indipendenti:
- si usa cioè quando voglio vedere se ci sono delle differenze significative tra due campioni.

Test di Mann e Whitney

a.k.a. Wilcoxon rank-sum test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni indipendenti:
- si usa cioè quando voglio vedere se ci sono delle differenze significative tra due campioni.
- Se la distribuzione della popolazione da cui provengono i campioni è normale, possiamo usare un test t per due campioni indipendenti:

Test di Mann e Whitney

a.k.a. Wilcoxon rank-sum test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni indipendenti:
- si usa cioè quando voglio vedere se ci sono delle differenze significative tra due campioni.
- Se la distribuzione della popolazione da cui provengono i campioni è normale, possiamo usare un test t per due campioni indipendenti:
- usiamo cioè il test t per validare l'ipotesi nulla che le medie dei due campioni siano identiche.

Test di Mann e Whitney

a.k.a. Wilcoxon rank-sum test

Quando si usa?

- Si usa per due campioni indipendenti:
- si usa cioè quando voglio vedere se ci sono delle differenze significative tra due campioni.
- Se la distribuzione della popolazione da cui provengono i campioni è normale, possiamo usare un test t per due campioni indipendenti:
- usiamo cioè il test t per validare l'ipotesi nulla che le medie dei due campioni siano identiche.
- Se però non siamo sicuri della normalità della popolazione, usiamo il test di Mann e Whitney.

La procedura

La procedura

1. Metto tutte le osservazioni insieme in un unico campione.

La procedura

1. Metto tutte le osservazioni insieme in un unico campione.
2. Assegno ad ogni osservazione il suo rango r, partendo dalla più piccola (mediando per i pareggi).

La procedura

1. Metto tutte le osservazioni insieme in un unico campione.
2. Assegno ad ogni osservazione il suo rango r, partendo dalla più piccola (mediando per i pareggi).
3. Ridivido i ranghi nei due campioni originali A e B.

La procedura

1. Metto tutte le osservazioni insieme in un unico campione.
2. Assegno ad ogni osservazione il suo rango r, partendo dalla più piccola (mediando per i pareggi).
3. Ridivido i ranghi nei due campioni originali A e B.
4. Sommo i ranghi di ogni campione:

La procedura

1. Metto tutte le osservazioni insieme in un unico campione.
2. Assegno ad ogni osservazione il suo rango r, partendo dalla più piccola (mediando per i pareggi).
3. Ridivido i ranghi nei due campioni originali A e B.
4. Sommo i ranghi di ogni campione:

$$T_A = \sum_{i=1}^{N_A} r_i \tag{5}$$

$$T_B = \sum_{j=1}^{N_B} r_j \tag{6}$$

dove r_i è il rango dell'i-esima osservazione del campione A, N_A è la dimensione del campione A, r_j è il rango della j-esima osservazione del campione B ed N_B è la dimensione del campione B.

ll test

Il test

Cosa ci aspettiamo da T_A e T_B?

Il test

Cosa ci aspettiamo da T_A e T_B?

- La somma di N ranghi è data da

$$T = \sum_{i=1}^{N} r_i = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \tag{7}$$

Il test

Cosa ci aspettiamo da T_A e T_B?

- La somma di N ranghi è data da

$$T = \sum_{i=1}^{N} r_i = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \tag{7}$$

- Il rango medio, perciò, è

$$\mu_r = \frac{T}{N} = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2} \tag{8}$$

Il test

Cosa ci aspettiamo da T_A e T_B?

- La somma di N ranghi è data da

$$T = \sum_{i=1}^{N} r_i = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \tag{7}$$

- Il rango medio, perciò, è

$$\mu_r = \frac{T}{N} = \frac{N \cdot (N+1)}{2} \cdot \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2} \tag{8}$$

- Ci aspettiamo quindi che

$$\overline{T}_A = \frac{N+1}{2} \cdot N_A \tag{9}$$

$$\overline{T}_B = \frac{N+1}{2} \cdot N_B \tag{10}$$

ll test

Il test

Solito trucco...

- Tanto per cambiare, T_A e T_B si distribuiscono normalmente intorno alle loro medie $\overline{T}_A$ e $\overline{T}_B$...

Il test

Solito trucco...

- Tanto per cambiare, T_A e T_B si distribuiscono normalmente intorno alle loro medie $\overline{T}_A$ e $\overline{T}_B$...
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z...

Il test

Solito trucco...

- Tanto per cambiare, T_A e T_B si distribuiscono normalmente intorno alle loro medie $\overline{T}_A$ e $\overline{T}_B$...
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z...
- $$\sigma_T = \sqrt{\frac{N_A \cdot N_B \cdot (N+1)}{12}} \tag{11}$$

Il test

Solito trucco...

- Tanto per cambiare, T_A e T_B si distribuiscono normalmente intorno alle loro medie $\overline{T}_A$ e $\overline{T}_B$...
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z...
- $$\sigma_T = \sqrt{\frac{N_A \cdot N_B \cdot (N+1)}{12}} \tag{11}$$
- $$z = \frac{(T - \overline{T}) \pm 0.5}{\sigma_T} = \frac{(T - \overline{T}) \pm 0.5}{\sqrt{\frac{N_A \cdot N_B \cdot (N+1)}{12}}} \tag{12}$$

Il test

Solito trucco...

- Tanto per cambiare, T_A e T_B si distribuiscono normalmente intorno alle loro medie $\overline{T}_A$ e $\overline{T}_B$...
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z...
- $$\sigma_T = \sqrt{\frac{N_A \cdot N_B \cdot (N+1)}{12}} \tag{11}$$
- $$z = \frac{(T - \overline{T}) \pm 0.5}{\sigma_T} = \frac{(T - \overline{T}) \pm 0.5}{\sqrt{\frac{N_A \cdot N_B \cdot (N+1)}{12}}} \tag{12}$$
- ± 0.5 è la "correzione di continuità" e prende sempre il segno meno se $(T - \overline{T}) > 0$ e viceversa.

Il test

Solito trucco...

- Tanto per cambiare, T_A e T_B si distribuiscono normalmente intorno alle loro medie $\overline{T}_A$ e $\overline{T}_B$...
- Ancora una volta, quindi, possiamo usare Z...
- $$\sigma_T = \sqrt{\frac{N_A \cdot N_B \cdot (N+1)}{12}} \qquad (11)$$
- $$z = \frac{(T - \overline{T}) \pm 0.5}{\sigma_T} = \frac{(T - \overline{T}) \pm 0.5}{\sqrt{\frac{N_A \cdot N_B \cdot (N+1)}{12}}} \qquad (12)$$
- ± 0.5 è la "correzione di continuità" e prende sempre il segno meno se $(T - \overline{T}) > 0$ e viceversa.
- Il risultato non cambia se considero il campione A od il campione B, perché risultano speculari! Naturalmente, però, dobbiamo sapere in che direzione stiamo effettuando il test...