

1. Risolvere il seguente sistema lineare (nel quale rispetto all'esempio della lezione del 27/10/2014 solo il termine noto dell'ultima equazione è stato cambiato da 8 a 9) con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = -5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = -7 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 11 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 9 \end{cases} .$$

(Suggerimento: Dopo aver ridotto la matrice completa del sistema a una matrice a scala, si consiglia di riscrivere l'ultima riga di tale matrice come equazione. Qual è la conclusione che si può trarre?)

2. Risolvere il seguente sistema lineare con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_3 = -3 \end{cases} .$$

3. Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per stabilire se le seguenti matrici sono invertibili e, in caso affermativo, per calcolarne l'inversa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} .$$

4. Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tali che $a \neq 0$, $ad - bc \neq 0$ e sia $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

(a) Si usi l'algoritmo di Gauss-Jordan per calcolare \mathbf{A}^{-1} .

(Osservazione: La formula ottenuta vale anche nel caso $a = 0$, purchè $ad - bc \neq 0$.)

(b) Si scriva \mathbf{A}^{-1} nel caso $c = d = 0$, cioè l'inversa della matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$.

5. Dati la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e il vettore $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}$, dove \mathbf{v}^T è il trasposto di \mathbf{v} .