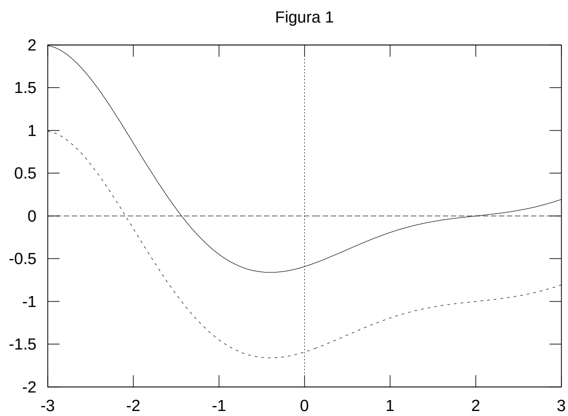
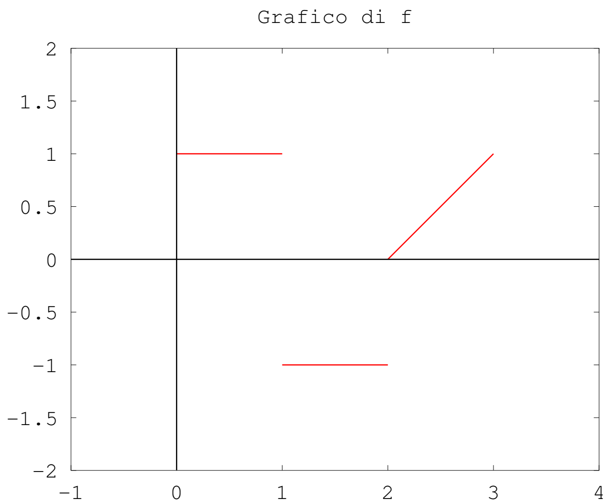
C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 03. 12. 2014

1. Dire quale dei integrali è più grande e calcolarli: $\left|\int_{-4}^{2} x\,dx\right|$, $\int_{-4}^{2} |x|\,dx$.

2. Nella figura 1 sono riportati i grafici delle funzioni f (curva continua) e g (curva tratteggiata) rispettivamente. Scrivete la funzione g in termini di f e calcolate $\int_{-3}^{+3} (f(x) - g(x))\,dx$.



3. Determinare gli eventuali punti in cui la funzione $f\colon [0;3] \to \mathbb{R}$, il cui grafico è stato riportato qui sotto, assume il suo valor medio integrale.



Nota: Il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)\,dx$ si vede direttamente dal grafico senza fare alcun calcolo con l'espressione analitica della funzione.

4. Trovare il punto di flesso e gli asintoti della seguente funzione logistica:

$$N(t) = \frac{5}{1 + e^{-2t+3}}.$$

5. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

dove $k = 8,05 \cdot 10^{-5} \mathrm{s}^{-1}$.

   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).

   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.

   (c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0?

6. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$

con la condizione iniziale

   (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

7. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$

dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.

   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

8. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

9. In una reazione chimica $\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x) \cdot ([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

dove k (in $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{M}^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti due casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 2$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 3$, $[\mathrm{B}]_0 = 2$.

10. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = 3(20 - C) \\ C(0) = 5\,. \end{cases}$$

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

(b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \to +\infty$.

(c) Usando la risposta di (a), si determini t in modo tale che $C(t) = 10$.