

C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 19/01/2015

Cognome: _____

Nome: _____

Matricola: _____

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Sia dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Quanti sono i sottoinsiemi di A formati da tre elementi?

Quante sono le possibili funzioni $A \rightarrow A$?

Quante sono le funzioni biettive $A \rightarrow A$?

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \text{_____}, \quad \text{(b) } \mathbf{A}^{-1} = \text{_____},$$

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{b}^T \mathbf{b} = \text{_____}$, $\mathbf{b} \mathbf{b}^T = \text{_____}$,

dove \mathbf{b}^T è il trasposto di \mathbf{b} .

3. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x}$ ($x > 0$) e il punto $x_0 = 32$. Si calcoli:

(a) $f'(x) = \text{_____}$

(b) $f''(x) = \text{_____}$

(c) il differenziale della f in x_0 e lo usi per calcolare approssimativamente $\sqrt[5]{33}$

$$df(32, dx) = \quad ; \sqrt[5]{33} \approx$$

(d) i coefficienti a, b, c del polinomio di Taylor $p_2(x) = a + b(x - 32) + c(x - 32)^2$ della f di grado 2 e di centro 32:

$$a = \quad , b = \quad , c =$$

(e) $\int_1^{32} f(x) dx =$

4. Data la funzione $f(x) = \frac{3}{1 + 2e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

(b) $f'(x) =$

(c) $f''(x) =$

(d) il punto di flesso di f :

(e) $\int_0^{\ln(2)} f(x) dx =$

(integrazione per sostituzione: $x = \ln(t - 2)$)

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \left(1 - \frac{y}{3}\right) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

$$y(x) =$$

N.B.: Per l'integrazione è utile l'identità: $\frac{1}{y(1 - \frac{y}{3})} = \frac{1}{y} + \frac{1}{3 - y}$.