C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 09/07/2015

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quante password differenti di 8 caratteri si possono generare utilizzando un alfabeto di 26 lettere (solo minuscole)? $\boxed{}$ E se nelle password non è possibile ripetere uno stesso carattere? $\boxed{}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 5 & -9 & 9 & -3 \\ -3 & 8 & -5 & -4 \\ -2 & 6 & -3 & -5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 5 & 1 \\ 11 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$, calcolare:

   (a) **tutte le soluzioni** (reali) del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boxed{}$

   (b) (se ciò è possibile) (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{}$, $\mathbf{AB} = \boxed{}$.

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ $(x > 0,\ x \neq 1)$, calcolare:

   (a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \boxed{}$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \boxed{}$

   (b) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \boxed{}$

   (applicare la regola di de l'Hospital: $f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}$)

(c) $f'(x) =$

(d) $f''(x) =$

(e) il punto stazionario x_0 di f e classificarlo:

$x_0 =$, si tratta di un punto di

(f) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(e, \frac{1}{e})$:

(g) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro e:

(h) gli intervalli di convessità della f:

(i) $\displaystyle\int_e^{e^2} f(x)dx =$

(integrazione per sostituzione: $t = \ln x$).

4. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}} \cos(2x+1)\, dx =$

5. Nella reazione chimica

$$2\,\mathrm{NOBr}\ (\mathrm{g}) \longrightarrow 2\,\mathrm{NO}\ (\mathrm{g}) + \mathrm{Br_2}\ (\mathrm{g})$$

la concentrazione x di NOBr in funzione del tempo t è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx^2 \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

dove k è una costante positiva ed x_0 la concentrazione iniziale di NOBr. A una temperatura di 10 °C si ha $k = 0,810\,\mathrm{M^{-1}s^{-1}}$.

(a) Si calcoli la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy.

$x(t) =$

(b) Si calcoli la concentrazione di NOBr dopo 15 minuti dall'inizio della reazione a 10ºC, quando la concentrazione iniziale era di $4,0 \cdot 10^{-3}$M.

(c) Dopo quanti minuti la concentrazione iniziale di NOBr sarà dimezzata?

Dipende il tempo di dimezzamento dalla concentrazione iniziale? Sì: ☐ No: ☐