C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 24/07/2015

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. In quanti modi 7 buste *numerate* possono essere assegnate a 7 persone? $\boxed{}$

   E se ognuna di esse riceve una busta? $\boxed{}$

   In quanti modi 7 buste *identiche* possono essere assegnate a 7 persone? $\boxed{}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -7 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,

   calcolare:

   (a) **tutte le soluzioni** (reali) del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boxed{}$

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{}$, $\mathbf{BA} = \boxed{}$.

3. Data la funzione $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ ($x \in \mathbf{R}$), calcolare:

   (a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{}$

   (applicare la regola di de l'Hospital: $f(x) = \dfrac{x}{e^{\frac{1}{2}x^2}}$)

   (b) $f'(x) = \boxed{}$

(c) $f''(x) =$

(d) i punti stazionari di f e classificarli:

(e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}})$:

(f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 1:

(g) i punti di flesso della f:

(h) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx =$

(integrazione per sostituzione: $t = -\frac{1}{2}x^2$).

4. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x-1)^7\, dx =$

5. Si consideri la reazione $2\, N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,. \end{cases}$$

A una temperatura di 298 K si ha $k = 3,4 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$.

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).

$x(t) =$

(b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.

(c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0? ($\ln 2 \approx 0,7$)