

1. Le scale di temperatura Celsius, Kelvin e Fahrenheit sono scale lineari tali che $0\text{ K} = -273.15^\circ\text{C}$ (zero assoluto), $0^\circ\text{C} = 32^\circ\text{F} = 273.15\text{ K}$ e $100^\circ\text{C} = 212^\circ\text{F}$.
 - (a) Se T_C, T_K, T_F indicano la temperatura nelle scale Celsius, Kelvin e Fahrenheit rispettivamente, scrivere la funzione $T_F = f_{FC}(T_C)$ che traduce gradi Celsius in gradi Fahrenheit, la funzione $T_C = f_{CK}(T_K)$ che traduce kelvin in gradi Celsius e specificare il dominio di queste funzioni.
 - (b) Tra i punti $(0, 273.15)$ e $(273.15, 0)$, quale appartiene al grafico di f_{CK} ?
 - (c) Qual è la funzione inversa di f_{FC} e qual è il suo dominio?
 - (d) Scrivere la funzione composta $f_{FK} := f_{FC} \circ f_{CK}$.
 - (e) Disegnare nello stesso sistema di riferimento i grafici di f_{CK} e f_{FK} .
 - (f) Per quale temperatura i valori delle scale Celsius e Fahrenheit coincidono?

2. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ costanti positive ($e = 2, 7 \dots$). Trovare i limite delle seguenti funzioni per $t \rightarrow +\infty$:

- (a) $f(t) = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$ (funzione logistica di crescita),

- (b) $f(t) = a \left(1 + \frac{b-a}{a - be^{c(b-a)t}} \right)$ (funzione della cinetica chimica).

Suggerimento: distinguere i casi $a > b$, $a = b$ e $a < b$.

3. Utilizzando il grafico di $f(x) = e^x$, disegnare i grafici di

$$y_1 = e^{|x|} \quad y_2 = \ln|x| \quad y_3 = e^x - 1 \quad y_4 = |e^x - 1| \quad y_5 = |\ln|x||.$$

4. Un comune foglio di carta ha uno spessore di circa $0,072\text{ mm}$. Se il foglio venisse piegato una prima volta in due, poi il foglio ripiegato piegato di nuovo in due, poi una terza volta e così via, 42 volte in totale, quale sarebbe lo spessore raggiunto (in km)?
5. Si ricordi che il $p\text{H}$ di una soluzione acquosa sufficientemente diluita è stato definito da Sørensen come $p\text{H} = -\log_{10}([\text{H}_3\text{O}^+] \text{ dm}^3/\text{mol})$, dove $[\text{H}_3\text{O}^+]$ indica la concentrazione di H_3O^+ .
 - (a) Calcolare il $p\text{H}$ di una soluzione $2,0 \cdot 10^{-3}\text{ M}$ di HCl ($M = \text{mol}/\text{dm}^3$).
 - (b) Il $p\text{H}$ di una soluzione è $9,67$, quello di un'altra $8,67$. Calcolare in entrambi i casi la concentrazione di H_3O^+ .
6. In determinate condizioni, il numero di un certo tipo di batteri triplica ogni due giorni. Se la crescita è esponenziale, qual è l'aumento percentuale dopo 6 ore? E dopo 18 ore?
7. Si stima che la popolazione mondiale, attualmente di circa 7 miliardi di individui, aumenti dell'1,1% all'anno. Supponendo che il tasso di crescita rimanga invariato nel tempo, calcolare entro quanti anni la popolazione raddoppierà, quadruplicherà, decuplicherà.

8. Il carbonio ^{14}C ha un tempo di dimezzamento di 5730 anni. Determinate l'età di un reperto organico per il quale la concentrazione di ^{14}C è risultata pari al 12,5% di quella degli analoghi organismi viventi.
9. Nelle aree contaminate dall'incidente di Chernobyl e da quello di Fukushima si trovano gli isotopi del cesio ^{137}Cs e ^{134}Cs . Il cesio isotopo ^{137}Cs perde annualmente il 2,3% della sua massa per disintegrazione radioattiva. Il cesio isotopo ^{134}Cs ha un tempo di dimezzamento di 2 anni. Si ricordi che il decadimento radioattivo è esponenziale, cioè il numero $N(t)$ di atomi residui al tempo t può essere valutato in rapporto al numero N_0 di atomi radioattivi iniziali tramite la formula

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}.$$

- (a) Si trovi la costante di decadimento λ (unità di misura?) per il ^{137}Cs .
- (b) Qual è la relazione tra il tempo di dimezzamento $T_{1/2}$ e λ ? Si calcoli il tempo di dimezzamento di ^{137}Cs .
- (c) Dopo quanti anni la radioattività del ^{137}Cs si riduce a 1%?
- (d) Si calcoli la costante di decadimento λ per il ^{134}Cs .
- (e) Nel 1995 è stata fatta un'analisi del rapporto dell'attività del ^{134}Cs sul ^{137}Cs nei funghi. Si è trovato un rapporto di 1 : 40. Il rapporto nella nube radioattiva proveniente da Chernobyl in seguito all'incidente nei primi giorni del maggio 1986 era 1 : 2.

La provenienza dei due isotopi nei funghi è da imputare alla deposizione in seguito all'incidente di Chernobyl?

- (f) Anche l'eliminazione biologica (per via urinaria, fecale e respiratoria) delle sostanze radioattive dall'organismo umano è approssimativamente esponenziale ed è caratterizzato dal tempo di dimezzamento biologico $T_{b1/2}$. Il cosiddetto tempo di dimezzamento effettivo T_{eff} risulta sia dal decadimento radioattivo sia dall'eliminazione biologica della sostanza radioattiva.

Trovare la relazione fra il tempo di dimezzamento effettivo T_{eff} , il tempo di dimezzamento fisico $T_{1/2}$ e il tempo di dimezzamento biologico $T_{b1/2}$.

(Si noti che $N(t) = N_0 e^{-\lambda_b t} e^{-\lambda t} = N_0 e^{-(\lambda_b + \lambda)t} = N_0 e^{-\lambda_{\text{eff}} t}$, cioè $\lambda_{\text{eff}} = \lambda_b + \lambda$, e usi il risultato di (b).)

- (g) Il cesio isotopo ^{134}Cs ha un tempo di dimezzamento fisico di 2 anni e un tempo di dimezzamento biologico di 110 giorni (maschi).

Calcolare il tempo di dimezzamento effettivo del cesio isotopo ^{134}Cs .