C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 12. 11. 2015

1. (Abate, seconda edizione, es. 5.50) Scrivi l'espressione esplicita di una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica, continua, con un valore massimo di 2 nel punto di massimo $x = 2$ e con n valore minimo -6 nel punto di minimo $x = 3$.

2. (Abate, seconda edizione, es. 5.52) L'oscillazione angolare Φ, in radianti, di un pendolo semplice è data da

$$\Phi(t) = \frac{\pi}{12} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\right) ,$$

dove $g \approx 9,81$ m/s^2 è l'accelerazione di gravità, ℓ è la lunghezza del pendolo (in metri), e il tempo è misurato in secondi. Supponendo $\ell = 2$ m, determina qual è l'oscillazione angolare massima, quando avviene, e trova il periodo delle oscillazioni.

3. Scrivere le equazioni delle rette tangenti al grafico della funzione $f(x) = \log_{10} x$ nei punti $P = (1, f(1))$ e $Q = (10, f(10))$. Calcolare il punto di intersezione della retta tangente passante per Q con l'asse delle x.

4. È noto che la distanza s percorsa da un corpo in caduta libera (senza attrito d'aria e con velocità iniziale 0) è $s(t) = \dfrac{g}{2}t^2$, dove t è il tempo e $g \approx 9,81$ ms^{-2} è l'accelerazione di gravità. Supponiamo che un corpo venga lasciato cadere da una quota di 30 m. Calcolate:

   (a) il tempo di caduta, (b) la velocità finale, (c) la velocità media.

   (d) In quale istante la velocità del corpo è uguale alla velocità media?

5. Calcolare le derivate delle funzioni inverse delle seguenti funzioni e precisare il dominio di tali derivate:

   (a) $y = fx) = x^2,\ x \geq 0\,;$ (b) $y = f(x) = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi.$

6. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $v(t) = at + \dfrac{b}{t} + c,$ (b) $y = 3\cos x - 2 \operatorname{sen} x,$ (c) $y = \dfrac{x}{x-3},$

   (d) $z(t) = (1-t)\cos t,$ (e) $f(y) = a\sqrt{y} \cdot \operatorname{sen} y,$ (f) $Q(\alpha) = \dfrac{1 - \operatorname{sen}\alpha}{1 + \cos\alpha}.$

7. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $y = \dfrac{x+1}{x-2},$ (b) $y = x \cdot \log_{10} x$, (c) $y = x \cdot \cos x$, (d) $f(x) = x \cdot \operatorname{sen}(|x|).$

   Suggerimento per (d): distinguere i 3 casi $x < 0$, $x = 0$, $x > 0$, e nel caso $x = 0$ studiare il limite del rapporto incrementale $\frac{f(h)-f(0)}{h}$ per $h \to 0$.