C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 03. 12. 2015

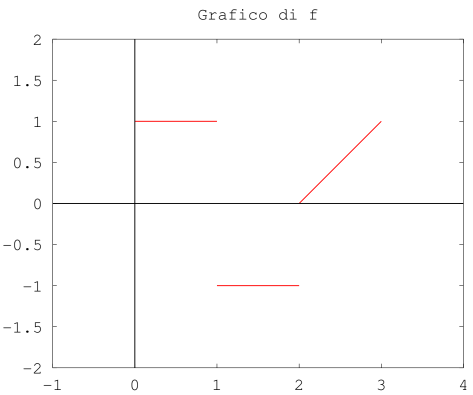
1. Calcolare gli integrali: (a) $\displaystyle\int_{-e}^{-1} x^{-1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_{2}^{3}(3x-5)^{-2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_{1}^{2} xe^{-x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{-3}^{0}\frac{1}{\sqrt{1-5x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx$, (g) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{\mathrm{sen}\,x}{3+\cos x}\,dx$ (sost. $u=3+\cos x$), (h) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^4\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ (sost. $u=1-\cos x$), (i) $\displaystyle\int_{0}^{2}\frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (sost. $u=\sqrt{x+1}$), (k) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (per parti).

2. Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico di $y=\mathrm{sen}(\frac{x}{3})$ e l'asse x, al variare di x nell'intervallo $[0,\pi]$.

3. Si trovi l'area limitata dalla parabola $y=3-x^2$ e dalla retta $y=-2x$ (disegno!).

4. Dire quale dei integrali è più grande e calcolarli: $\displaystyle\left|\int_{-4}^{2} x\,dx\right|$, $\displaystyle\int_{-4}^{2}|x|\,dx$.

5. Determinare gli eventuali punti in cui la funzione $f\colon[0;3]\to\mathbb{R}$, il cui grafico è stato riportato qui sotto, assume il suo valor medio integrale.



Nota: Il valore dell'integrale $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ si vede direttamente dal grafico senza fare alcun calcolo con l'espressione analitica della funzione.

6. (a) Trovare la soluzione $N=N(t)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r\left(1-\dfrac{N}{K}\right)N \text{ (equazione logistica)}, \\ N(0)=N_0\,, \end{cases}$$

dove r e K sono costanti positive.
Suggerimento: Discutere separatamente i casi $N_0<0$, $N_0=0$, $0<N_0<K$, $N_0=K$, $N_0>K$.

(b) Trovare il punto di flesso e gli asintoti della seguente funzione logistica:

$$N(t)=\frac{5}{1+e^{-2t+3}}.$$

7. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

dove $k = 8,05 \cdot 10^{-5} s^{-1}$.

   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).
   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.
   (c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0?

8. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$

con la condizione iniziale

   (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

9. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$

dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.
   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

10. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

11. In una reazione chimica $A + B \longrightarrow C$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[A]_0$, $[B]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([A]_0 - x) \cdot ([B]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

dove k (in $s^{-1}M^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti due casi:

   (a) $[A]_0 = [B]_0 = 2$, (b) $[A]_0 = 3$, $[B]_0 = 2$.

12. Si considerino i vettori $\vec{u} = (2, 1)$ e $\vec{v} = (1, 3)$. Calcolare e disegnare i vettori $2\vec{u} + \vec{v}$ e $-2\vec{u} - 3\vec{v}$.

13. Trovare la somma di $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.

14. Dati i vettori $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (-3, 2)$, calcolare $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$.