C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 10. 12. 2015

1. Stabilire quali delle seguenti funzioni $f_i\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($i = 1, \ldots, 4$) sono lineari e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata ad f_i:

   (a) $f_1\colon (x, y) \mapsto (xy, x + y)$;

   (b) $f_2\colon (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$;

   (c) $f_3\colon (x, y) \mapsto (x - y, x + y + 1)$;

   (d) $f_4\colon (x, y) \mapsto (2x - y, x + 3y)$.

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, valutare (se ciò è possibile) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$, $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $3\mathbf{A} - \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$.

3. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{AB}$, $\mathbf{Av}$, $\mathbf{Bv}$, $\mathbf{vw}$, $\mathbf{wv}$.

4. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{AO}$, $\mathbf{OA}$, $\mathbf{AI}$, $\mathbf{IA}$, $\mathbf{PA}$ e $\mathbf{AP}$.

5. Calcolare la matrice associata alla composizione $f_4 \circ f_2$ delle funzioni f_2 e f_4 dell'esercizio 1.