C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 17. 11. 2016

1. Trovare i limiti (se esistono) delle seguenti successioni (a_n) per n tendente all'infinito:
   (a) $a_n = (-1)^n$, (b) $a_n = 2^n$,
   (c) $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, (d) $a_n = a + bn$ $(a, b \text{ sono costanti}, b \neq 0)$.

2. Discutere il comportamento limite di $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ per $x \to 2^-$, $x \to 2^+$, $x \to -2^-$, ed $x \to -2^+$.

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$, $x \neq -1$,
   (a) calcolarne i limiti agli estremi del dominio, cioè i limiti per $x \to -1^-$, $x \to -1^+$, $x \to -\infty$ e $x \to +\infty$,
   (b) disegnare il grafico della f nell'intervallo $[-5, 3]$.

4. Data la funzione
$$f(x) = \frac{x + \operatorname{sen} x}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
   si calcolino (se esistono) i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to 0^+$ e $x \to 0^-$.

5. Si calcolino (se esistono) i seguenti limiti:
   (a) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{4}{1 + e^{-3t}}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \ln x$,
   (d) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{6}{2 + \ln t}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{sen} x$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$.

6. Siano $a, b, c \in \mathbf{R}$ costanti positive $(e = 2,7\ldots)$. Trovare i limite delle seguenti funzioni per $t \to +\infty$:
   (a) $f(t) = \dfrac{a}{1 + be^{-ct}}$ (funzione logistica di crescita),
   (b) $f(t) = a\left(1 + \dfrac{b - a}{a - be^{c(b-a)t}}\right)$, dove $a \neq b$ (funzione della cinetica chimica).
   Suggerimento: distinguere i casi $a > b$ e $a < b$.

7. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua nel punto $x_0 = 0$? Motivate la risposta.

8. Si usi il teorema dei valori intermedi o di Bolzano per stabilire se
   (a) $x^4 - 2x = 1$ ha soluzioni reali nell'intervallo chiuso $[-1, \frac{1}{2}]$;
   (b) $\cos x = x$ ha soluzioni reali nell'intervallo chiuso $[0, \frac{\pi}{2}]$.

9. Determinare per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ sono verificate le ipotesi del teorema di Weierstrass per la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \alpha + x^2, & 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ \operatorname{sen}(\pi x), & \frac{3}{2} < x \leq 2. \end{cases}$$
   Determinare anche il minimo e il massimo della funzione f.