C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 22. 12. 2016

1. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$
dove $k = 8{,}05 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$.
   (a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).
   (b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.
   (c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0?

2. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale
$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$
con la condizione iniziale
   (a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

   Suggerimento: Per l'integrazione si noti che $\frac{1}{y(y-3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right)$.

3. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ soddisfa l'equazione differenziale
$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$
dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.
   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.
   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

5. Si considerino i vettori $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Calcolare e disegnare i vettori $2\vec{u} + \vec{v}$ e $-2\vec{u} - 3\vec{v}$.

6. Trovare la somma di $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.

7. Dati i vettori $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (-3,2)$, calcolare $\vec{a} - \vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a} - \vec{b}|$ e il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

8. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, valutare (se ciò è possibile) $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, $\mathbf{A}+\mathbf{C}$, $\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $3\mathbf{A}-\mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\mathbf{AC}$, $\mathbf{CA}$.

9. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, ed i vettori $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{AB}$, $\mathbf{Av}$, $\mathbf{Bv}$, $\mathbf{vw}$, $\mathbf{wv}$.

10. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{AO}$, $\mathbf{OA}$, $\mathbf{AI}$, $\mathbf{IA}$, $\mathbf{PA}$ e $\mathbf{AP}$.