C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 17/02/2017

Cognome: ____________________

Nome: ____________________

Matricola: ____________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quanti sono i numeri di 6 cifre che: (a) non iniziano con la cifra 0?

   (b) contengono 3 volte esatte la cifra 1 e 3 volte esatte la cifra 2?

   (c) contengono 2 volte esatte la cifra 1, 2 volte esatte la cifra 2 e non contengono la cifra 0?

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$, $x > 0$, calcolare:

   (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) =$

   (Per trovare il secondo limite è utile la regola di de l'Hospital.)

   (b) $f'(x) =$

   (c) $f''(x) =$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   (e) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 1:

   (f) i punti di flesso della f:

   (g) $\displaystyle\int_0^{(\ln 3)^2} \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx =$

   (per sostituzione: $u = \sqrt{x}$)

3. Calcolare

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x\cos(3x)\,dx =$

(b) $\displaystyle\int_1^{9} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx =$

4. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ è la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = -kC^2 & (k \text{ è una costante positiva, } t \text{ è il tempo}) \\ C(0) = C_0\,. \end{cases}$$

Trovare la soluzione $C(t)$ e il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$.

$C(t) =$ $\qquad\qquad$ $\lim_{t\to\infty} C(t) =$

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -4 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 \\ -8 \\ 1 \end{bmatrix}$,

(a) calcolare la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$,

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{Aa} =$, $\mathbf{ba}^T =$,

(c) dire quante soluzioni $\mathbf{x}$ ha il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}$ e giustificare la risposta:

.