C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 06/09/2017

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. (a) Quante sono le matrici 3×3 i cui elementi sono 0 o 1? $\boxed{}$

   (b) Quante di tali matrici contengono esattamente 6 volte la cifra 1? $\boxed{}$

   (c) Quante sono le matrici di (a) tali che ogni riga e colonna abbia una somma pari? $\boxed{}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{}, \qquad \text{(b) } \mathbf{A}^{-1} = \boxed{},$$

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{b}\mathbf{b}^T = \boxed{}$, dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$,

   (d) (se ciò è possibile) $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \boxed{}$.

3. Data la funzione $f(x) = e^{\operatorname{sen}(x)} \cdot \cos(x)$, $-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}$, calcolare:

   (a) $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) =$ $\boxed{}$, $\lim_{x \to +\frac{\pi}{2}^-} f(x) =$ $\boxed{}$

   (b) $f'(x) =$

   (c) $f''(x) =$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   (e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(0, 1)$:

   (f) i punti di flesso della f:

   (g) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(x)\, dx =$
   (integrazione per sostituzione $t = \operatorname{sen}(x)$).

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ $(x > 0)$, calcolare

   (a) $f'(x) =$

   (b) $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f'(x)\, dx =$

5. $\int_0^8 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx =$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(4x)\, dx =$

7. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{x} \\ y(-1) = -1\,. \end{cases}$$

$y(x) =$ dominio: