C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 28/11/2014

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

   Quanti sono i sottoinsiemi di B formati da tre elementi? $\boxed{\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56}$

   Quante sono le possibili funzioni $A \to B$? $\boxed{8^3 = (2^3)^3 = 2^9 = 512}$

   Quante sono le funzioni iniettive $A \to B$? $\boxed{8 \cdot 7 \cdot 6 = 336}$

2. Un gioco consiste nel lanciare 7 monete non truccate. Calcola la probabilità di ottenere 5 teste. $\boxed{\frac{\binom{7}{5}}{2^7} = \frac{\binom{7}{2}}{2^7} = \frac{21}{128}}$

3. Un brodo di coltura è infetto da N_0 batteri. Le cellule dei batteri si dividono ogni tre ore.

   (a) Quanti batteri ci saranno nel brodo dopo 24 h? $\boxed{2^{\frac{24}{3}} N_0 = 256\, N_0}$

   (b) Determinare il parametro λ (in h^{-1}) in modo tale che il numero N dei batteri presenti dopo t ore possa essere approssimata mediante la funzione $N = N(t) = N_0 2^{\lambda t}$. $\boxed{\lambda = \frac{1}{3} \quad \mathrm{h}^{-1}}$

   (c) Determinare il parametro μ (in h^{-1}) in modo tale che il numero N dei batteri presenti dopo t ore possa essere approssimata mediante la funzione $N = N(t) = N_0 e^{\mu t}$. $\boxed{\mu = \frac{\ln 2}{3} \quad \mathrm{h}^{-1}}$

4. Si determinino i valori reali di x per cui: $\log_3(x^2) - \log_3(2x) = 2$.

   $\boxed{\log_3 \frac{x^2}{2x} = 2 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3^2 \Rightarrow x = 18}$

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}},$$

(b) $$\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}},$$

(c) (se ciò è possibile) $$\mathbf{Ab} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}}, \quad \mathbf{b}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 1, & -1, & 2 \end{bmatrix}},$$

dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$,

(d) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ utilizzando $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -3c_1 - c_2 + 3c_3 \\ -2c_1 - c_2 + 2c_3 \end{bmatrix}}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \; R3 - R1 \rightarrow \; \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \; R3 - \tfrac{1}{2}R2 \rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} R2/2 \rightarrow \\ 2R3 \rightarrow \end{array} \; \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} R1 - 3R3 \rightarrow \\ R2 + \frac{3}{2}R3 \rightarrow \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 7 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right] \; R1 + R2 \rightarrow \; \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}$ = terza colonna di $\mathbf{A}^{-1}$ (poiché $\mathbf{b}$ = terza colonna di $\mathbf{I}_3$).

C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 28/11/2014

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   Quanti sono i sottoinsiemi di B formati da tre elementi? $\boxed{\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20}$

   Quante sono le possibili funzioni $A \to B$? $\boxed{6^4 = (2^4) \cdot 3^4 = 16 \cdot 81 = 1296}$

   Quante sono le funzioni iniettive $A \to B$? $\boxed{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 30 \cdot 12 = 360}$

2. Un gioco consiste nel lanciare 6 monete non truccate. Calcola la probabilità di ottenere 4 teste. $\boxed{\frac{\binom{6}{4}}{2^6} = \frac{\binom{6}{2}}{2^6} = \frac{15}{64}}$

3. Un brodo di coltura è infetto da N_0 batteri. Le cellule dei batteri si dividono ogni quattro ore.

   (a) Quanti batteri ci saranno nel brodo dopo 24 h? $\boxed{2^{\frac{24}{4}} N_0 = 64\, N_0}$

   (b) Determinare il parametro λ (in h^{-1}) in modo tale che il numero N dei batteri presenti dopo t ore possa essere approssimata mediante la funzione $N = N(t) = N_0 2^{\lambda t}$. $\boxed{\lambda = \frac{1}{4} \quad \mathrm{h}^{-1}}$

   (c) Determinare il parametro μ (in h^{-1}) in modo tale che il numero N dei batteri presenti dopo t ore possa essere approssimata mediante la funzione $N = N(t) = N_0 e^{\mu t}$. $\boxed{\mu = \frac{\ln 2}{4} \quad \mathrm{h}^{-1}}$

4. Si determinino i valori reali di x per cui: $\log_4(2x^2) - \log_4(x) = 2$.

   $\boxed{\log_4 \frac{2x^2}{x} = 2 \Rightarrow 2x = 4^2 \Rightarrow x = 8}$

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}, \qquad \text{(b) } \mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}},$$

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{Ab} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{b}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} -3, & -1, & 3 \end{bmatrix}}$,

dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$,

(d) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ utilizzando $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 - 2c_2 + 3c_3 \\ 2c_2 - 3c_3 \\ c_1 - c_2 + 2c_3 \end{bmatrix}}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R2+3R1 \to \\ R3+2R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ R3 - \frac{1}{2}R2 \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R2/2 \to \\ 2R3 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ R2 - \frac{3}{2}R3 \to \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} R1 - R2 \to \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{x}$ = seconda colonna di $\mathbf{A}^{-1}$ (poiché $\mathbf{b}$ = seconda colonna di $\mathbf{I}_3$).