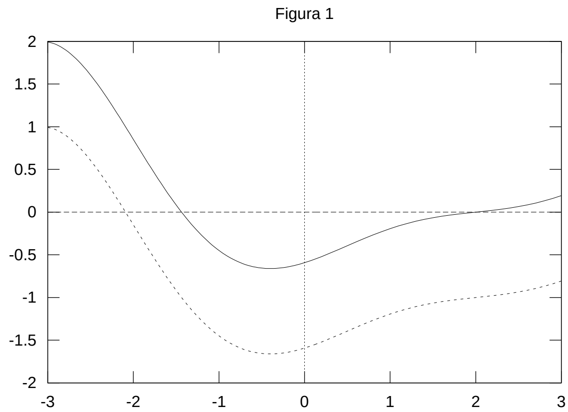
C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 03. 12. 2014

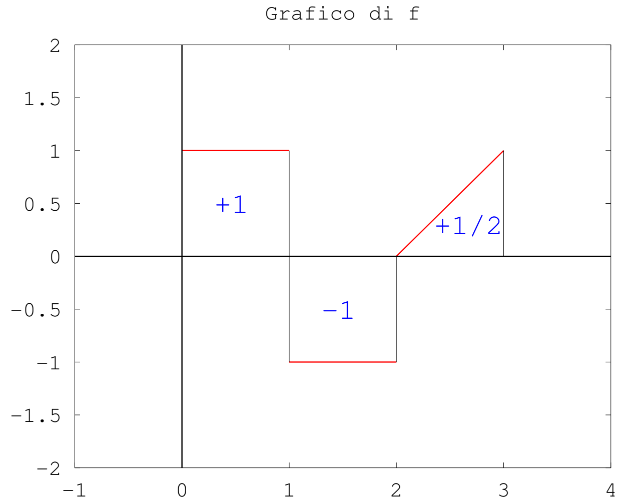
1. Dire quale dei integrali è più grande e calcolarli: $\left|\int_{-4}^{2} x\,dx\right|$, $\int_{-4}^{2} |x|\,dx$.

   $$\left|\int_{-4}^{2} x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^{2}\right| = 6 < \int_{-4}^{2} |x|\;dx = \int_{-4}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = 8+2$$

2. Nella figura 1 sono riportati i grafici delle funzioni f (curva continua) e g (curva tratteggiata) rispettivamente. Scrivete la funzione g in termini di f e calcolate $\int_{-3}^{+3} (f(x)-g(x))\,dx$. per $-3 \le x \le 3$, $g(x) = f(x)-1$; $\int_{-3}^{+3} 1\,dx = 6$



3. Determinare gli eventuali punti in cui la funzione $f\colon [0;3] \to \mathbb{R}$, il cui grafico è stato riportato qui sotto, assume il suo valor medio integrale.



Nota: Il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)\,dx$ si vede direttamente dal grafico senza fare alcun calcolo con l'espressione analitica della funzione.

Dal grafico si evince che $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Di conseguenza il valor medio integrale della f sull'intervallo $[0,3]$ è $\frac{1}{6}$ che viene assunto in $[2,3]$ dove $f(x) = x-2$. Da $x-2=\frac{1}{6}$ si trova che la f assume il suo valor medio integrale nel punto $x = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$ (come si vede anche dal grafico).

4. Trovare il punto di flesso e gli asintoti della seguente funzione logistica:

$$N(t) = \frac{5}{1+e^{-2t+3}}.$$

$N'(t) = \frac{10e^{-2t+3}}{(1+e^{-2t+3})^2} = \frac{2}{5}e^{-2t+3}[N(t)]^2$, $N''(t) = \frac{2}{5}\left(-2e^{-2t+3}[N(t)]^2 + 2e^{-2t+3}N(t)N'(t)\right)$ $= \frac{4}{5}e^{-2t+3}N(t)[-N(t) + N'(t)]$, ne segue: $N''(t) \geq 0 \Leftrightarrow N'(t) \geq N(t) \Leftrightarrow \frac{2e^{-2t+3}}{1+e^{-2t+3}} \geq 1 \Leftrightarrow 2e^{-2t+3} \geq 1 + e^{-2t+3} \Leftrightarrow e^{-2t+3} \geq 1 \Leftrightarrow -2t+3 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{3}{2}$, quindi il punto $\left(\frac{3}{2}, N(\frac{3}{2})\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ è un punto di flesso discendente per il grafico di N.

5. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

dove $k = 8{,}05 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$.

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).

(b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.

(c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0?

(a) $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -k\int_0^t dt \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -kt \quad \Rightarrow \quad x = x(t) = x_0 e^{-kt}$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$

(c) $\displaystyle\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-kt} \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 = -kt \quad \Rightarrow$

$\displaystyle t = \frac{\ln 2}{k} = \frac{10^5 \cdot \ln 2}{8{,}05 \cdot 60^2}\ \mathrm{h} = 2{,}39\ \mathrm{h} = 2\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$

6. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$

con la condizione iniziale

(a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

Le funzioni costante $y = 0$ e $y = 3$ sono soluzioni dell'equazione differenziale, quindi $y = 3$ è soluzione del problema di Cauchy (b). Sia adesso $y \neq 0$ e $y \neq 3$.

Allora $\int \frac{dy}{y(y-3)} = \int dx$ e con $\frac{1}{y(y-3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right)$ si ottiene $\ln|\frac{y-3}{y}| = 3x + c$ (c è costante di integrazione), quindi $|\frac{y-3}{y}| = e^{3x+c} = e^c e^{3x}$. Nel caso (a) $|\frac{y-3}{y}| = -\frac{y-3}{y} = e^{3x+c}$ e $-\frac{\frac{3}{2}-3}{\frac{3}{2}} = 1 = e^c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 3 - y = ye^{3x}$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{3}{1+e^{3x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Nel caso (c) $|\frac{y-3}{y}| = \frac{y-3}{y} = e^{3x+c}$ e $\frac{6-3}{6} = \frac{1}{2} = e^c \Rightarrow \frac{y-3}{y} = \frac{1}{2}e^{3x} \Rightarrow 2(y-3) = ye^{3x}$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{6}{2-e^{3x}}$, $x > \frac{\ln 2}{3}$.

7. Nella reazione bimolecolare $2\,\mathrm{NO_2} \longrightarrow \mathrm{N_2O_4}$ la concentrazione $C = C(t) = [\mathrm{NO_2}]$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$

dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

   (a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.
   $\int_{C_0}^{C} \frac{dC}{C^2} = -k\int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = kt \Rightarrow C = C(t) = \frac{1}{\frac{1}{C_0}+kt}$, $t \geq 0$

   (b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$. $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$

8. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

$\int_0^y e^{-y}\,dy = \int_1^x \ln x\,dx \Rightarrow [-e^{-y}]_0^y = [x\ln x]_1^x - \int_1^x x\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow 1 - e^{-y} = x\ln x - x + 1 \Rightarrow e^{-x} = x(1-\ln x) \Rightarrow y = -\ln x - \ln(1-\ln x)$, $0 < x < e$

9. In una reazione chimica $\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[\mathrm{A}]_0$, $[\mathrm{B}]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([\mathrm{A}]_0 - x)\cdot([\mathrm{B}]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

dove k (in $\mathrm{s^{-1}M^{-1}}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti due casi:

   (a) $[\mathrm{A}]_0 = [\mathrm{B}]_0 = 2$, (b) $[\mathrm{A}]_0 = 3$, $[\mathrm{B}]_0 = 2$.

   (a) $\int_0^x \frac{dx}{(2-x)^2} = k\int_0^t dt \Rightarrow \left[\frac{1}{2-x}\right]_0^x = kt \Rightarrow \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + kt \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{\frac{1}{2}+kt}$, $t > 0$

   (b) $\int_0^x \frac{dx}{(2-x)(3-x)} = k\int_0^t dt \Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{2-x} - \frac{1}{3-x}\right) dx = kt \Rightarrow \ln|\frac{2-x}{3-x}| - \ln\frac{2}{3} = kt$
   $\Rightarrow \frac{2-x}{3-x} = \frac{2}{3}e^{kt} \Rightarrow 2 - x = \frac{2}{3}(3-x)e^{kt} \Rightarrow x = \frac{2-2e^{kt}}{1-\frac{2}{3}e^{kt}} = \frac{6-6e^{-kt}}{3-2e^{-kt}}$, $t > 0$

   In entrambi i casi (a) e (b), $\lim_{t\to\infty} x(t) = 2$.

10. La concentrazione $C = C(t)$ di un soluto in funzione del tempo t sia soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{dt} = 3(20 - C) \\ C(0) = 5\,. \end{cases}$$

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy.

(b) Si trovi il limite di $C(t)$ per $t \to +\infty$.

(c) Usando la risposta di (a), si determini t in modo tale che $C(t) = 10$.

(a) $\int_5^C \frac{dC}{20-C} = 3\int_0^t dt \Rightarrow [-\ln|20 - C|]_5^C = 3t,$ poiché $C(0) = 5$ si ha $20 - C > 0 \Rightarrow \frac{20-C}{20-5} = e^{-3t} \Rightarrow C = 20 - 15e^{-3t},\ t > 0$

(b) $\lim_{t\to\infty} C(t) = 20$

(c) $10 = 20 - 15e^{-3t} \Rightarrow e^{-3t} = \frac{2}{3} \Rightarrow -3t = \ln 2 - \ln 3 \Rightarrow t = \frac{1}{3}(\ln 3 - \ln 2)$ $= \frac{1}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$