C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 19/01/2015

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Sia dato l'insieme $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

   Quanti sono i sottoinsiemi di A formati da tre elementi? $\boxed{\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20}$

   Quante sono le possibili funzioni $A \to A$? $\boxed{6^6 = 2^6 \cdot 3^6 = 64 \cdot 729 = 46656}$

   Quante sono le funzioni biiettive $A \to A$? $\boxed{6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$, calcolare

   (a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

   $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -3 & -7 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{bmatrix}}$,

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{b}^T\mathbf{b} = \boxed{78}$, $\mathbf{b}\mathbf{b}^T = \boxed{\begin{bmatrix} 49 & -14 & 35 \\ -14 & 4 & -10 \\ 35 & -10 & 25 \end{bmatrix}}$,

   dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$.

(a),(b) $\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 2 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} \\ R2 + R1 \to \\ R3 + 2R1 \to \end{matrix}$ $\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 2 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 19 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R3 - 5R2 \to$ $\left[\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 2 & -3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -3 & -5 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{matrix} -R1 \to \\ \\ R3/3 \to \end{matrix}$

$$\left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -2 & 3 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right] \begin{array}{l} R1-3R3 \to \\ R2+2R3 \to \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$R1+2R2 \to \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

3. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt[5]{x}$ $(x > 0)$ e il punto $x_0 = 32$. Si calcoli:

(a) $f'(x) = \boxed{\left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}}$

(b) $f''(x) = \boxed{\frac{1}{5}\left(x^{-\frac{4}{5}}\right)' = -\frac{4}{25}x^{-\frac{9}{5}} = -\frac{4}{25x\sqrt[5]{x^4}}}$

(c) il differenziale della f in x_0 e lo usi per calcolare approssimativamente $\sqrt[5]{33}$

$\boxed{df(32, dx) = f'(32)\,dx = \frac{1}{80}dx = 0{,}0125\,dx; \quad \sqrt[5]{33} \approx 2 + \frac{1}{80} \cdot 1 = 2{,}0125}$,

(d) i coefficienti a, b, c del polinomio di Taylor $p_2(x) = a + b(x-32) + c(x-32)^2$ della f di grado 2 e di centro 32:

$\boxed{a = f(32) = 2 \qquad , b = f'(32) = \frac{1}{80} \qquad , c = \frac{1}{2!}f''(32) = -\frac{1}{6400}}$,

(e) $\displaystyle\int_1^{32} f(x)dx = \boxed{\int_1^{32} x^{\frac{1}{5}}\,dx = \frac{5}{6}\left[x^{\frac{6}{5}}\right]_1^{32} = \frac{5}{6}(2^6 - 1) = \frac{105}{2}}$.

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-x}}$, $\quad x \in \mathbb{R}$, calcolare

(a) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{3}$

(b) $f'(x) = \boxed{3\left((1+2e^{-x})^{-1}\right)' = 6e^{-x}\left(1+2e^{-x}\right)^{-2}}$

(c) $f''(x) = \boxed{\begin{array}{l} 6\left(e^{-x}\left(1+2e^{-x}\right)^{-2}\right)' = 6\left(-e^{-x}\left(1+2e^{-x}\right)^{-2} + 4e^{-2x}\left(1+2e^{-x}\right)^{-3}\right) \\ = 6e^{-x}\left(1+2e^{-x}\right)^{-2}\left(-1 + 4e^{-x}\left(1+2e^{-x}\right)^{-1}\right) \end{array}}$

(d) il punto di flesso di f: $\boxed{\begin{array}{l} f''(x) \ \geq \ 0 \ \Leftrightarrow \ e^{-x}\left(1+2e^{-x}\right)^{-1} \ \geq \ \frac{1}{4} \ \Leftrightarrow \\ e^{x}\left(1+2e^{-x}\right) \leq 4 \Leftrightarrow e^{x} \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \ln 2, \text{ cioè } (\ln 2, \frac{3}{2}) \\ \text{è punto di flesso discendente} \end{array}}$

(e) $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx = \boxed{\int_3^4 \frac{3}{1+\frac{2}{t-2}} \cdot \frac{1}{t-2}\,dt = \int_3^4 \frac{3}{t}\,dt = 3(\ln 4 - \ln 3) = 3\ln\frac{4}{3}}$

(integrazione per sostituzione: $x = \ln(t-2)$)
$dx = \frac{dt}{t-2}, \quad e^x = t-2, \quad e^{-x} = \frac{1}{t-2}, \quad t = e^x + 2$

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y\left(1 - \dfrac{y}{3}\right) \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{3e^x}{2+e^x} = \frac{3}{1+2e^{-x}}}$$

N.B.: Per l'integrazione è utile l'identità: $\dfrac{1}{y\left(1-\frac{y}{3}\right)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{3-y}$.

Se $y \neq 0, y \neq 3$, si ottiene:

$$\int_1^y \frac{dy}{y\left(1-\frac{y}{3}\right)} = \int_0^x 1\,dx \quad \Rightarrow \quad \int_1^y \frac{1}{y}\,dy + \int_1^y \frac{1}{3-y}\,dy = x$$

$$\Rightarrow \quad \ln|y| - \ln 1 - (\ln|3-y| - \ln|3-1|) = x \quad \Rightarrow$$

$\ln\left|\dfrac{2y}{3-y}\right| = x$. Poiché $y(0) = 1$, $\left|\dfrac{2y}{3-y}\right| = \dfrac{2y}{3-y} = e^x \quad \Rightarrow$

$$2y = 3e^x - ye^x \quad \Rightarrow y = \frac{3e^x}{2+e^x} = \frac{3}{1+2e^{-x}}.$$