C.d.L. in Scienze naturali

Prova di Matematica del 23/02/2015

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. (a) Quante sequenze di 5 caratteri si possono formare con le lettere dell'insieme $\{A, B, C, D\}$? $\boxed{4^5 = 2^{10} = 1024}$

   (b) Quante delle sequenze determinate al punto (a) non contengono la lettera B? $\boxed{3^5 = 27 \cdot 9 = 243}$

   (c) Quante delle sequenze determinate al punto (a) contengono esattamente due volte la lettera B? $\boxed{\binom{5}{2} \cdot 3^3 = 10 \cdot 27 = 270}$

$$\left.\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \end{array}$$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, calcolare:

$$\left.\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ R_3 + 2R_2 \end{array}$$

   (a) tutte le soluzioni del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$$\left.\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -5 & 3 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ -R_2 \\ R_3/4 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}},$$

$$\left.\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ R_2 + R_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right. \begin{array}{l} R_1 - R_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

   (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}}$, (c) $\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -3 & -1 & -5 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}}$.

$$\begin{array}{rrr|c|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\underbrace{}_{=\vec{x}} \quad \underbrace{}_{=A^{-1}}$$

3. Si consideri la funzione $f(x) = \sqrt[4]{x}$ $(x \geq 0)$ e il punto $x_0 = 625$. Si calcoli:

   (a) $f'(x) = \boxed{\frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} \quad (x > 0)}$

   (b) $f''(x) = \boxed{-\frac{3}{16} x^{-\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{16} x^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{16\sqrt[4]{x^7}} \quad (x > 0)}$

(c) il differenziale della f in x_0 e lo usi per calcolare approssimativamente $\sqrt[4]{626}$

$df(625, dx) = f'(5^4)\,dx = \frac{1}{500}\,dx = 0{,}002\,dx$; $\sqrt[4]{626} \approx 5{,}002$,

(d) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(625, 5)$:

$y = 5 + \frac{1}{500}(x - 625)$,

(e) i coefficienti a, b, c del polinomio di Taylor $p_2(x) = a + b(x - 625) + c(x - 625)^2$ della f di grado 2 e di centro 625:

$a = 5$, $b = \frac{1}{500} = 0{,}002$, $c = -\frac{3}{2\,500\,000}$,

(f) $\int_0^{625} f(x)dx = \left[\frac{4}{5}\, x^{\frac{1}{4}+1}\right]_0^{625} = \frac{4}{5}\left[x\sqrt[4]{x}\right]_0^{625} = 4 \cdot 625 = 2500$.

4. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare

(a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

(b) $f'(x) = \left[(1+e^{-x})^{-1}\right]' = (1+e^{-x})^{-2}e^{-x} = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

(c) $f''(x) = -e^{-x}(1+e^{-x})^{-2} + e^{-x} \cdot 2(1+e^{-x})^{-3}e^{-x} = \dfrac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(1+e^{-x})^3}$

(d) il punto di flesso di f: $(0; \frac{1}{2})$

(e) $\int_0^{\ln(3)} f(x)\,dx = \int_2^4 \frac{t-1}{t} \cdot \frac{1}{t-1}\,dt = \left[\ln t\right]_2^4 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$

(integrazione per sostituzione: $x = \ln(t-1)$) $e^x = t-1$

$dx = \frac{1}{t-1}\,dt$ $e^{-x} = \frac{1}{t-1}$, $1 + e^{-x} = \frac{t}{t-1}$

5. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y\left(1 - \dfrac{y}{2}\right) \\ y(0) = 4\,. \end{cases}$

$y(x) = \dfrac{4}{2 - e^{-x}}$.

N.B.: Per l'integrazione è utile l'identità: $\dfrac{1}{y\left(1 - \frac{y}{2}\right)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{2 - y}$.

$\int_4^y \frac{dy}{y(1-\frac{y}{2})} = \int_0^x dx = x$,

$\ln\frac{y}{4} - \ln\frac{|2-y|}{|2-4|} = x$

$\ln\frac{y}{4} - \ln\frac{|2-y|}{2} = x$

$\ln\frac{y}{2(y-2)} = x$ $\quad \frac{y}{2(y-2)} = e^x$

$2(y-2) = ye^{-x}$

$2y - ye^{-x} = 4$