C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 19/06/2015

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Uno studente deve rispondere a 5 domande su 10. Solo 5 su 10. Quante possibili scelte ha? $\boxed{\binom{10}{5}=252}$ E se deve per forza scegliere almeno 2 tra le prime 5?

$$\boxed{\binom{5}{2}\cdot\binom{5}{3}+\binom{5}{3}\cdot\binom{5}{2}+\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{1}+\binom{5}{5}\cdot\binom{5}{0}=226}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} R1 \\ \\ R3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ R2+2R1 \\ \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 14 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ R3-\frac{3}{5}R2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c|ccc} -1 & 2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 14 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{12}{5} & 1 & -\frac{3}{5} & -\frac{6}{5} \end{array}\right. \begin{array}{l} -R1 \\ R2/5 \\ -\frac{5}{4}R3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -2 & -1 & -4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{array}\right. \begin{array}{l} R1+R3 \\ R2-\frac{3}{5}R3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right. \begin{array}{l} R1+2R2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\underset{\vec{x}}{\shortparallel} \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{=A^{-1}}$$

2. Date le matrici $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}=\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, calcolare:

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1}=\boxed{\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB}=\boxed{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A}=\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix}}$,

dove $\mathbf{B}^T$ è la trasposta di $\mathbf{B}$.

3. Data la funzione $f(x)=(\ln x)^2$ $(x>0)$, calcolare:

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\boxed{+\infty}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\boxed{+\infty}$

(b) $f'(x)=\boxed{2(\ln x)^{2-1}\cdot(\ln x)'=\frac{2\ln x}{x}}$

(c) $f''(x)=\boxed{\frac{2}{x^2}\left((\ln x)'x-(\ln x)\cdot x'=\frac{2}{x^2}(1-\ln x)\right)}$

(d) il differenziale della f nel punto $e \approx 2,7$ e usarlo per calcolare approssimativamente $(\ln 3)^2$ (eseguire i calcoli a mano con una sola cifra decimale):

$df(e, dx) = f'(e)dx = \frac{2}{e}dx$; $(\ln 3)^2 \approx f(e) + \frac{2}{2,7}(3-2,7) = 1,2$

(e) l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(e, 1)$:

$y - 1 = f'(e)(x-e) = \frac{2}{e}x - 2 \Rightarrow y = \frac{2}{e}x - 1$

(f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 1:

$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{1}{2!}f''(1)(x-1)^2 = (x-1)^2$

(g) i minimi e massimi relativi di f: min $(1,0)$, max rel. non esiste

(h) i punti di flesso di f: $(e,1)$ è flesso discendente: $f''(x) > 0$ per $0 < x < e$, $f''(x) < 0$ per $e < x$

(i) $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e 1 \cdot \ln^2 x \, dx = [x \ln^2 x]_1^e - \int_1^e 2 \ln x \, dx = e - 2[x\ln x - x]_1^e = e-2$

(integrazione per parti, due volte).

4. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{\pi-1}{2}} \operatorname{sen}(2x+1)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} t \, dt = \frac{1}{2}[-\cos t]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1+1) = 1$

sost.: $t = 2x+1$, $dx = \frac{1}{2}dt$

5. Un corpo abbia la temperatura T e sia posto a contatto con un ambiente che rimanga a temperatura costante T_a. Se $T_a < T$, allora la temperatura $T = T(t)$ del corpo si riduce nel tempo t secondo la *legge di raffreddamento di Newton*:

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_a) \quad (k \text{ è una costante, } k \neq 0).$$

Supponiamo che in un ambiente di 21 °C il corpo si raffreddi da 30 °C a 28 °C in 5 minuti. Partendo dalla temperatura iniziale di 30 °C, in quanto tempo il corpo raggiunge i 24 °C? Si trovi la risposta in tre passi:

(a) Si trovi la soluzione $T = T(t)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = k(T - 21\,°C) \\ T(0) = 30\,°C\,. \end{cases}$$

$\int_{30}^{T} \frac{dT}{T-21} = k\int_0^t dt = kt$

$\ln \frac{T-21}{30-21} = kt$

$\boxed{\frac{T-21}{9} = e^{kt}}$

$T(t) = (21 + 9e^{kt})\,°C$

(b) Si usi $T(5 \text{ min}) = 28\,°C$ per determinare la costante k.

$k = -\frac{1}{20 \text{ min}}$; $28 = 21 + 9e^{5k} \Rightarrow e^{5k} = \frac{7}{9} \Rightarrow 5k = \ln 7 - \ln 9 \approx -0,25 = -\frac{1}{4}$

(c) Usando che $\ln(3) \approx 1,10$, $\ln(7) \approx 1,95$, $\ln(9) \approx 2,20$, si calcoli il tempo (in minuti) in cui il corpo raggiunge i 24 °C (suggerimento: conviene utilizzare la soluzione $T(t)$ di (a) in forma implicita).

$\frac{24-21}{9} = e^{kt} \Rightarrow kt = -\ln 3 \Rightarrow t = 20 \cdot 1,1 \text{ min} = 22 \text{ min}$