C.d.L. in Scienze naturali

Prova di Matematica del 24/07/2015

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. In quanti modi 7 buste *numerate* possono essere assegnate a 7 persone? $\boxed{7^7}$

   E se ognuna di esse riceve una busta? $\boxed{7!}$

   In quanti modi 7 buste *identiche* possono essere assegnate a 7 persone? $\boxed{\binom{13}{7}} = \binom{13}{6}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -7 & 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ -3 & 4 & -7 & 8 & 1 \end{array}\right] \quad R2+3R1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 4 \end{array}\right] \quad R2/(-2)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \quad R1+2R2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right], \text{ cioè } \begin{cases} x_1 + x_3 = -3 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

2 variabili liberi: $x_3 = s$, $x_4 = t$

   (a) **tutte le soluzioni** (reali) del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & -10 & 17 & -20 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ -3 & 4 & -7 & 8 \end{bmatrix}$.

3. Data la funzione $f(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}$ $(x \in \mathbf{R})$, calcolare:

   (a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0^-}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0^+}$

   (applicare la regola di de l'Hospital: $f(x) = \frac{x}{e^{\frac{1}{2}x^2}}$) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{xe^{\frac{1}{2}x^2}} = \pm 0$

   (b) $f'(x) = \boxed{e^{-\frac{1}{2}x^2} + x(-\tfrac{1}{2}x^2)' e^{-\frac{1}{2}x^2} = (1-x^2)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}}$

(c) $f''(x) =$ $\boxed{-2x e^{-\frac{1}{2}x^2} + (1-x^2)(-x)e^{-\frac{1}{2}x^2} = x(x^2-3)e^{-\frac{1}{2}x^2}}$

(d) i punti stazionari di f e classificarli: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$$\boxed{\underset{f''(-1)>0}{(-1, -\tfrac{1}{\sqrt{e}}) \text{ min. rel. e ass.}}, \quad \underset{f''(1)<0}{(1, \tfrac{1}{\sqrt{e}}) \text{ max. rel. e ass}}}$$

(e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}})$:

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}} + f'(\sqrt{3})(x-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}} - \frac{2}{e\sqrt{e}}(x-\sqrt{3})}$$

(f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 1:

$$\boxed{f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{\sqrt{e}}(x-1)^2}$$

(g) i punti di flesso della f: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o } x^2 = 3$

$$\boxed{3 \text{ flessi: } (-\sqrt{3}, \tfrac{-\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}) \text{ asc.}, (0,0) \text{ disc.}, (\sqrt{3}, \tfrac{\sqrt{3}}{e\sqrt{e}}) \text{ asc.}}$$

(h) $\int_0^1 f(x)dx =$ $\boxed{-\int_0^{-\frac{1}{2}} e^t dt = \int_{-\frac{1}{2}}^0 e^t dt = e^0 - e^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{e}}}$

(integrazione per sostituzione: $t = -\frac{1}{2}x^2$). $dt = -x\,dx$

4. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} (2x-1)^7\,dx =$ $\boxed{\frac{1}{2}\int_0^2 t^7 dt = \frac{1}{16}\left[t^8\right]_0^2 = \frac{2^8}{2^4} = 2^4 = 16}$

sost.: $t = 2x-1$, $dt = 2dx$, $dx = \frac{1}{2}dt$

5. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,. \end{cases}$$

$$\frac{dx}{x} = -k\,dt$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -k\int_0^t dt = -kt$$

$$\ln\frac{x}{x_0} = -kt$$

$$\frac{x}{x_0} = e^{-kt}$$

A una temperatura di 298 K si ha $k = 3,4 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$.

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).

$x(t) =$ $\boxed{x_0 e^{-kt}, \quad t \geq 0}$

(b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$. $\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = 0}$

(c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0?

$$\boxed{t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k} \approx \frac{0,7}{3,4} \cdot 10^5 s \approx 2 \cdot 10^4 s = \frac{200}{36} h \approx 5,5 h}$$

$$x(t_{1/2}) = \frac{1}{2}x_0 \Leftrightarrow \ln\frac{x(t_{1/2})}{x_0} = \ln\frac{1}{2} = -k\,t_{1/2}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 = k \cdot t_{1/2} \Leftrightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}$$