C.d.L. in Scienze naturali

Prova di Matematica del 14/09/2015

Cognome: ______________________

Nome: ______________________

Matricola: ______________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quante sono le possibili funzioni $\{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$? $\boxed{5^3 = 125}$

   Quante di tali funzioni sono iniettive? $\boxed{5 \cdot 4 \cdot 3 = 60}$

   E quante sono strettamente crescenti? $\boxed{\binom{5}{3} = 10}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -7 & 1 \end{array}\right] \quad R2+3R1$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \end{array}\right] \quad R2/(-2)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right] \quad R1+2R2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$x_1 = -3 - t$

$x_2 = -2 + t$

$x_3 = t$ (variabile libera)

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, calcolare:

   (a) **tutte le soluzioni** (reali) del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ t \in \mathbb{R}}$

   (c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\text{non è definito}}$, $\mathbf{BA} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 7 & -10 & 17 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 4 & -7 \end{bmatrix}}$.

3. Data la funzione $f(x) = xe^{-x}$ ($x \in \mathbf{R}$), calcolare:

   (a) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \boxed{-\infty}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boxed{0 \left(= \lim_{x \to +\infty} \frac{x'}{(e^x)'} \right)}$

   (applicare la regola di de l'Hospital)

   (b) $f'(x) = \boxed{x' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}}$

(c) $f''(x) = \boxed{(1-x)'e^{-x}+(1-x)(e^{-x})' = -e^{-x}-(1-x)e^{-x} = (x-2)e^{-x}}$

(d) i punti stazionari di f e classificarli:

$\boxed{f'(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1},\ f''(1)<0 \Rightarrow (1,\tfrac{1}{e})\ \text{mass. rel.}}$ (e ass.)

(e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nell'origine:

$\boxed{y = f'(0)\cdot x = x}$

(f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro 1:

$\boxed{f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = \frac{1}{e} - \frac{1}{2e}(x-1)^2}$

(g) i punti di flesso della f:

$\boxed{(2, \tfrac{2}{e^2})\ \ (f''\ \text{cambia il segno nel pto. 2})\ \text{è flesso ascendente}}$

(h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \boxed{\left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1}$
(integrazione per parti).

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{5x^2+1}{\sqrt{x}}\,dx = \boxed{\int_0^1 (5x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})dx = \left[2x^{\frac{5}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right]_0^1 = 4}$

5. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{y^3}{x} \\ y(2) = -1\,. \end{cases}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^3} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$-\frac{1}{2y^2} = \ln|x| + c$

$-\frac{1}{2} = \ln 2 + c$

$c = -\frac{1}{2} - \ln 2$

$y(x) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{1-2\ln x + 2\ln 2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-2\ln\frac{x}{2}}}}$

Dominio: $\boxed{0 < x < 2\sqrt{e}}$

$x > 0$ e $1 - 2\ln\frac{x}{2} > 0$

$\frac{1}{2} > \ln\frac{x}{2}$

$e^{\frac{1}{2}} > \frac{x}{2}$

$x < 2\sqrt{e}$

$-\frac{1}{2y^2} = \ln x - \frac{1}{2} - \ln 2$

$= \ln\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

$\frac{1}{y^2} = -2\ln\frac{x}{2} + 1$

$y = -\sqrt{\frac{1}{1-2\ln\frac{x}{2}}}$