C.d.L. in Scienze naturali – Matematica

08. 10. 2015

1. Scrivere in modo esteso l'espressione del binomio $(x-2)^5$.
   $= x^5 + \binom{5}{1}x^4(-2)^1 + \binom{5}{2}x^3(-2)^2 + \binom{5}{3}x^2(-2)^3 + \binom{5}{4}x^1(-2)^4 + (-2)^5$
   $= x^5 - 10x^4 + 40x^3 - 80x^2 + 80x - 32$

2. Calcolare $\binom{100}{3}$ e $\binom{100}{97}$.$= \binom{100}{100-97} = \binom{100}{3} = \frac{100\cdot 99\cdot 98}{3\cdot 2\cdot 1} = 50\cdot 33\cdot 98 = 161700$

3. (a) Qual è il coefficiente di a^3b^2 nello sviluppo della potenza $(a+b)^5$?
   $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} = 10$

   (b) Qual è il coefficiente di a^3b^2c nello sviluppo della potenza $(a+b+c)^6$?
   $(a+b+c)^6 = ((a+b)+c)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(a+b)^k c^{6-k} = \ldots + \binom{6}{5}(a+b)^5 c + \ldots = \ldots + 6(a+b)^5 c + \ldots = \ldots 6\binom{5}{3}a^3b^2c + \ldots = \ldots + \mathbf{60}a^3b^2c + \ldots$

4. Un giocatore del SuperEnalotto deve pronosticare i sei numeri estratti da novanta numeri.

   (a) Quante sono le possibili scelte? $C_{90,6} = \binom{90}{6} = 622614630$

   (b) Quante sono le possibili scelte per fare una quaterna? Per avere una quaterna occorre avere esattamente 4 dei 6 numeri estratti e gli altri 2 numeri diversi dai numeri estratti: $C_{6,4}\cdot C_{84,2} = \binom{6}{4}\cdot\binom{84}{2} = 15\cdot 3486 = 52290$

5. (a) Quanti sottoinsiemi di 5 elementi si possono formare da un insieme di 10 elementi?
   (Si ricordi che due insiemi sono uguali se e solo se essi sono composti dagli stessi elementi, cioè ogni elemento dell'uno e anche elemento dell'altro e viceversa. Ad esempio, i tre insiemi $\{a,b\}$, $\{b,a\}$ e $\{b,b,a\}$ sono uguali.) $C_{10,5} = \binom{10}{5} = 252$

   (b) Quanti sono tutti i sottoinsiemi di un insieme di 10 elementi (contando anche l'insieme vuoto e l'insieme stesso)?
   $\sum_{k=0}^{10} C_{10,k} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k} = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$

6. Le basi dell'RNA sono quattro: adenina (A), guanina (G), citosina (C) ed uracile (U). Durante la sintesi proteica la cellula traduce una sequenza di codoni (o triplette di basi) in una sequenza di amminoacidi. Ad esempio, il codone CCG codifica la prolina, CGC l'arginina e GCC l'alanina.

   (a) Qual è il numero dei possibili codoni che si possono formare con le 4 basi?
   $D^{\text{rip}}_{4,3} = 4^3 = 64$

   (b) Qual è il numero dei possibili codoni che contengono l'adenina esattamente una volta? $C_{3,1}\cdot D^{\text{rip}}_{3,2} = 3\cdot 3^2 = 27$

   (c) Qual è il numero dei possibili codoni che contengono l'adenina (almeno una volta)? $C_{3,1}\cdot D^{\text{rip}}_{3,2} + C_{3,2}\cdot D_{3,1} + 1 = 27 + 9 + 1 = 37$
   (Ci sono 27 codoni che contengono l'adenina una sola volta, 9 che contengono l'adenina esattamente 2 volte e il codone AAA.)

7. Tutte le proteine sono polimeri di 20 tipi diversi di alfa-amminioacidi e differiscono tra loro per il numero, la composizione e la sequenza degli amminoacidi. Quante sequenze amminoacidiche di lunghezza 100 si possono formare? $D^{\text{rip}}_{20,100} = 20^{100} = 2^{100} \cdot 10^{100} = (2^{10})^{10} \cdot 10^{100} \approx (10^3)^{10} \cdot 10^{100} = 10^{130}$ (poiché $2^{10} = 1024 \approx 1000 = 10^3$)

8. È noto che in natura esistono tre isotopi (chimicamente indistinguibili) dell'idrogeno ^1H, ^2H (deuterio), ^3H (tritio) e tre isotopi dell'ossigeno ^{16}O, ^{17}O, ^{18}O. Quante sono le possibili molecole di acqua H_2O isotopicamente differenti che si possono formare con tali isotopi? $C^{\text{rip}}_{3,2} \cdot 3 = \binom{3+2-1}{2} \cdot 3 = 6 \cdot 3 = 18$

9. Supponiamo che ogni lancio di una moneta abbia i possibili risultati o testa (T) o croce (C) (e altri esiti non siano possibili, in particolare la moneta non finisca mai sul bordo).

   (a) Si lancia una moneta per 4 volte, quanti diversi risultati si possono avere? $D^{\text{rip}}_{2,4} = 2^4 = 16$

   (b) Quanti di tali risultati contengono T esattamente 2 volte? $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ (Di conseguenza, la probabilità di ottenere su 4 lanci esattamente 2 teste è $\frac{6}{16} = \frac{3}{8} = 37,5\%$.)