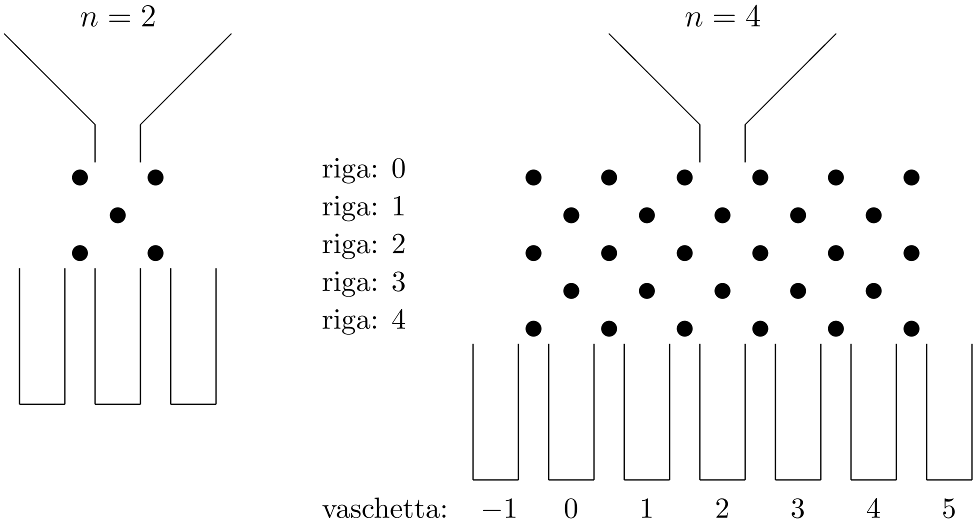
C.d.L. in Scienze naturali – Matematica

13. 10. 2015

1. Si consideri una *macchina di Galton* (detta anche *quinconce*) con n righe sfalsate di pioli o chiodi e con $n+1$ vaschette per raccogliere le palline cadute, si veda la seguente figura (si noti che la riga 0, le vaschette -1 e 5 e alcuni chiodi sono superflue):



   (a) Quanti sono i possibili percorsi attraverso i chiodi che una pallina può seguire? 2^n

   (b) Quanti sono i possibili percorsi verso la k-esima vaschetta? (Le vaschette sono numerate come nella figura.) $\binom{n}{k}$

   (c) Quante sono le possibili distribuzioni di m palline su $n+1$ vaschette? $C^{\text{rip}}_{n+1,m} = \binom{n+1+m-1}{m} = \binom{n+m}{m} = \binom{n+m}{n}$

   (d) Se la probabilità delle deviazioni della pallina verso destra su un chiodo é $\frac{1}{2}$ e si lasciano cadere 2^n palline, quante palline ci aspettiamo di trovare nella k-esima vaschetta? $\binom{n}{k}$

   (e) Se la probabilità delle deviazioni della pallina verso destra su un chiodo é p, quale è la probabilità che la pallina finisca nella k-esima vaschetta? $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

   (f) Per $n=2$ e $m=4$, quale sono le probabilità delle distribuzioni in (c)? Le probabilità delle possibili $\binom{4+2}{2} = 15$ distribuzioni (m_0, m_1, m_2) ($m_i :=$ numero di palline nella i-esima vaschetta) sono:

$1/256 = (1/4)^4$	$(0,0,4), (4,0,0)$
$4/256 = \binom{4}{1}(1/4)(1/4)^3$	$(1,0,3), (3,0,1)$
$6/256 = \binom{4}{2}(1/4)^2(1/4)^2$	$(2,0,2)$
$8/256 = \binom{4}{1}(1/2)(1/4)^3$	$(0,1,3), (3,1,0)$
$16/256 = (1/2)^4$	$(0,4,0)$
$24/256 = 2\binom{4}{2}(1/4)(1/2)(1/4)^2$	$(1,1,2), (2,1,1)$
$24/256 = \binom{4}{2}(1/2)^2(1/4)^2$	$(0,2,2), (2,2,0)$
$32/256 = \binom{4}{1}(1/2)^3(1/4)$	$(0,3,1), (1,3,0)$
$48/256 = 2\binom{4}{2}(1/4)(1/2)^2(1/4)$	$(1,2,1)$.

2. Qual è la probabilità che nelle targhe automobilistiche a 6 cifre tutte le cifre siano tra loro distinte? $(10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)/10^6$

3. Calcolate la probabilità che, in una famiglia con tre figli, tutti e tre siano maschi:

   (a) senza disporre di altre informazioni, $1/8$

   (b) sapendo già che almeno uno dei figli è maschio, $1/7$

   (c) sapendo già che il primogenito è maschio. $1/4$

4. Determinare la probabilità che lanciando 15 volte un dado il numero 4 si presenti:
   (a) 4 volte, $\binom{15}{4}(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^{11}$ (b) nei primi 4 lanci, $(\frac{1}{6})^4(\frac{5}{6})^{11}$ (c) almeno una volta, $1-(\frac{5}{6})^{15}$ (d) almeno 14 volte, $15(\frac{1}{6})^{14}(\frac{5}{6})^1+(\frac{1}{6})^{15}=\frac{76}{6^{15}}$ (e) al massimo 2 volte. $(\frac{5}{6})^{15}+15(\frac{1}{6})^1(\frac{5}{6})^{14}+\binom{15}{2}(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^{13}=41\cdot\frac{5^{14}}{6^{15}}$