C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 22. 10. 2015

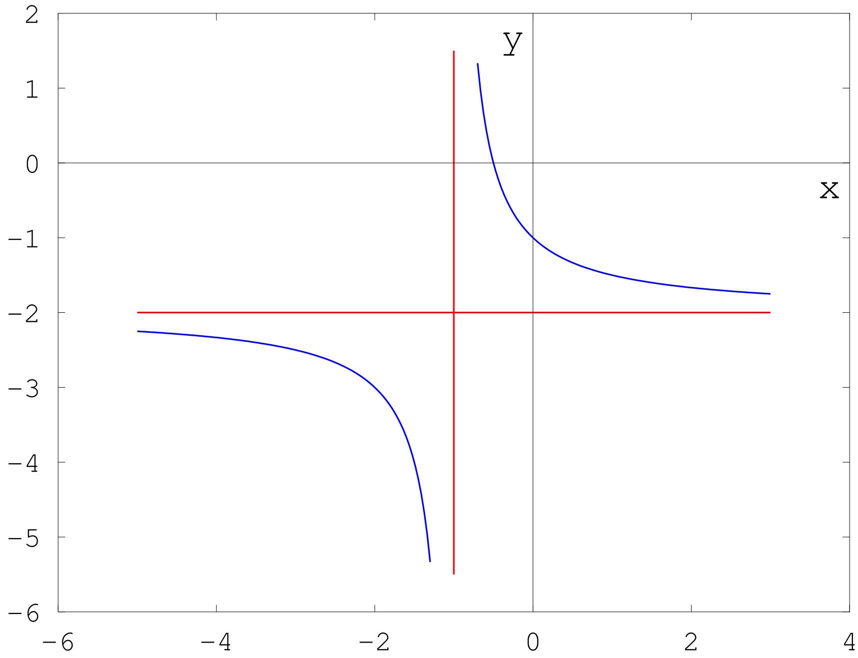
1. Si considerino le funzioni da $\{1,2,3,4,5\}$ a $\{1,2,3,4\}$.
   (a) Quante sono? $4^5 = (2^2)^5 = 2^{10} = 1024$
   (b) Quante di esse sono iniettive? 0
   (c) Quante di esse sono suriettive? $\binom{5}{2} \cdot 4! = 240$
   Spiegazione: Ogni funzione suriettiva manda qualche coppia di elementi di $\{1,2,3,4,5\}$ sullo stesso elemento di $\{1,2,3,4\}$. Ci sono $\binom{5}{2} = 10$ tali coppie di elementi. Data una coppia $\{i,j\} \subset \{1,2,3,4,5\}$, ci sono $4! = 24$ funzioni suriettive f tali che $f(i) = f(j)$. Ne segue che complessivamente ci sono $10 \cdot 24 = 240$ funzioni suriettive.

2. Trovare le funzioni inverse (se esistono) delle seguenti funzioni:
   (a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = f(x) = 2x + 2, \quad f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y - 1$
   (b) $f\colon \{x \in \mathbb{R} \mid x \le 0\} \to \{y \in \mathbb{R} \mid y \ge 0\}, \quad y = f(x) = x^2, \quad f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$
   (c) $f\colon \mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R} \mid y \ge 0\}, \quad y = f(x) = |x|$, f non è invertibile.
   (d) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}, \quad y = f(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \le x\}$ (parte intera), f non è invertibile.
   (e) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y = f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y}$
   (f) $f\colon \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{2\}\ , \quad y = f(x) = \dfrac{2x+3}{x-2}. \quad f^{-1}(y) = \dfrac{2y+3}{y-2}$

3. Trovare i limiti (se esistono) delle seguenti successioni (a_n) per n tendente all'infinito:
   (a) $a_n = (-1)^n$, non esiste
   (b) $a_n = 2^n$, $+\infty$
   (c) $a_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$, 0
   (d) $a_n = a + bn \quad (a, b$ sono costanti, $b \neq 0)$.
   se $b < 0$: $-\infty$, se $b > 0$: $+\infty$

4. Discutere il comportamento limite di $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 - 4}$ per $x \to 2^-$ $(-\infty)$, $x \to 2^+$ $(+\infty)$, $x \to -2^-$ $(-\infty)$, ed $x \to -2^+$ $(+\infty)$.

5. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$, $x \neq -1$,
   (a) calcolarne i limiti agli estremi del dominio, cioè i limiti per $x \to -1^-$ $(-\infty)$, $x \to -1^+$ $(+\infty)$, $x \to -\infty$ (-2) e $x \to +\infty$ (-2),
   (b) disegnare il grafico della f nell'intervallo $[-5, 3]$.



6. La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ è continua nel punto $x_0 = 0$? Motivate la risposta. È continua: $\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} (-x) = 0 = |0|$, $\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 = |0|$.

7. Disegnare i grafici delle funzioni

$$f_1(x) = 2^x, \quad f_2(x) = 2^{-x}, \quad f_3(x) = 3^x, \quad f_4(x) = 3^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

nello stesso sistema di riferimento.