C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 19. 11. 2015

1. Calcolare le derivate delle seguenti funzioni:

   (a) $h(\phi) = \dfrac{\operatorname{sen} 2\phi}{\cos 3\phi}$, (b) $f(x) = \cos(e^{3x})$, (c) $f(x) = \cos(4x^2 - x + 1)$,

   (a) $\frac{2\cos 2\phi \cos 3\phi + 3 \operatorname{sen} 2\phi \operatorname{sen} 3\phi}{\cos^2 3\phi}$, (b) $-3e^{3x} \operatorname{sen}(e^{3x})$, (c) $(-8x+1)\operatorname{sen}(4x^2 - x + 1)$.

   (d) $U(t) = qt^{-2}$, (e) $R(s) = \dfrac{1}{a - bs}$, (f) $R(s) = \dfrac{1}{\log_{10} s}$, (g) $v(t) = (3t-1)^{-2}$

   (d) $-2qt^{-3}$, (e) $\dfrac{b}{(a-bs)^2}$, (f) $-\dfrac{\log_{10} e}{s(\log_{10} s)^2}$, (g) $-6(3t-1)^3$.

2. Sia f una funzione reale e x_0 un punto non isolato del suo dominio. Si dimostri che, se f è derivabile nel punto x_0, allora f è continua in quel punto.

   Suggerimento: si usi la relazione $f(x) - f(x_0) = \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ con $\alpha \to 0$ per $x \to 0$ (lezione del 16/11/2015).

   Da dimostrare: $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ o, equivalentemente, $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$. Dalla relazione $f(x) - f(x_0) = \Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, passando al limite per $x \to x_0$, cioè $\Delta x = x - x_0 \to 0$, si ottiene $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$. Ne segue $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

3. Le misure della lunghezza e della larghezza di un poster rettangolare sono 160 cm e 90 cm, entrambe con l' errore del 2%. Qual è l'errore percentuale (errore relativo) sull'area calcolata? Calcola la misura dell'area con l'errore assoluto.

   L'errore relativo di un prodotto è la somma degli errori relativi dei singoli fattori. Quindi l'errore percentuale sull'area calcolata è del 4%. Ne segue che l'area è pari a $(1,44 \pm 0,06)\text{m}^2$.

   Gli stessi risultati si ottengono calcolando valore min $= (160 + 0,02 \cdot 160) \cdot (90 + 0,02 \cdot 90)\text{cm}^2 = 1,50\text{m}^2$ e valore min $= (160 - 0,02 \cdot 160) \cdot (90 - 0,02 \cdot 90)\text{cm}^2 = 1,38\text{m}^2$.

   Nota: Dalla precisione indicata attraverso gli errori percentuali segue che si hanno 3 cifre significative.

4. Misurando il volume di un cilindro metallico si trova $V = (10,0 \pm 0,1)$ cm^3; la massa del cilindro è $m = (27,1 \pm 0,1)$ g. Calcola la densità e l'errore percentuale sulla densità.

   valore max $= 27,2 : 9,9\,\text{g/cm}^3 = 2,75\,\text{g/cm}^3$, valore min $= 27,0 : 10,1\,\text{g/cm}^3 = 2,67\,\text{g/cm}^3$, ne segue che la densità è uguale a $(2,71 \pm 0,04)$ g/cm^3 e l'errore sulla densità è del $0,04/2,71 \cdot 100\% = 1,5\%$.

   2º metodo:

   L'errore relativo di un quoziente è la somma degli errori relativi del numeratore e del denominatore: $(0,1/27,1 + 0,1/10,0) \cdot 100\% = 1,4\%$. Ne segue che la densità è $(2,71 \pm 2,71 \cdot 0,014)\text{g/cm}^3 = (2,71 \pm 0,04)\text{g/cm}^3$.

5. Mediante il differenziale calcolare approssimativamente la quantità $\sqrt{10001}$.

   $y = f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 10000, f(x_0) = 100, \Delta x = 1, \Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{10000}} = \frac{1}{200} = 0,005, \sqrt{10001} = 100 + \Delta y \approx 100 + dy = 100,005.$

6. Usare il differenziale della funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ per calcolare approssimativamente $1,002^{-1}$ e $0,997^{-1}$ e confrontare i risultati con i valori precisi.
$df(x, \Delta x) = -\frac{1}{x^2}\Delta x$, $df(1, \Delta x) = -\Delta x$, quindi $1,002^{-1} \approx 1 - df(1; 0,002) = 1 - 0,002 = 0,998$; analogamente $0,997^{-1} \approx 1 + 0,003 = 1,003$.
I valori precisi sono $0,9980\dots$ e $1,0030\dots$ rispettivamente.

7. Si ricordi che il pH è definito come $p\mathrm{H} = -\log_{10} \mathrm{a_{H^+}}$, dove $\mathrm{a_{H^+}}$ indica l'attività adimensionale dei cationi ossonio.

   (a) Una soluzione abbia un pH di 4. Per quale pH l'attività $\mathrm{a_{H^+}}$ risulterebbe mille volte minore?

   (b) Se il pH è stato determinato con una accuratezza di $0,02$ pH, con quale errore percentuale si conosce $\mathrm{a_{H^+}}$? (Si usi il differenziale della funzione $y = f(x) = -\log_{10} x$ e il valore $\ln 10 \approx 2,3$.)
   Da $dy = -\frac{1}{x}(\log_{10} e)\Delta x = -\frac{1}{\ln 10}\frac{\Delta x}{x}$ si ottiene $\frac{\Delta x}{x} \approx -2,3\Delta y$, ossia $\frac{\Delta \mathrm{a_{H^+}}}{\mathrm{a_{H^+}}} \approx -2,3\,\Delta p\mathrm{H}$ e l'errore percentuale è $\left|\frac{\Delta \mathrm{a_{H^+}}}{\mathrm{a_{H^+}}}100\%\right| \approx 2,3 \cdot 0,02 \cdot 100\% = 4,6\%$.
   Nota: Un calcolo preciso (senza utilizzare il differenziale) mostra che alla variazione di $\pm 0,02$ del pH corrisponde una variazione di $\mathrm{a_{H^+}}$ del $-4,5\%$ e del $+4,7\%$ rispettivamente.

8. Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 7x + 1$$

   prendendo come punto iniziale $x_0 = 2$.

   N.B.: Le derivate di ordine 5 e maggiore della f sono identicamente zero, cioè il polinomio di Taylor di grado 4 è già la serie di Taylor.

   Le derivate sono $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 4x - 7$, $f''(x) = 12x^2 - 12x + 4$, $f'''(x) = 24x - 12$, $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(k)}(x) = 0$ per $k \geq 5$, quindi $f(2) = -5$, $f'(2) = 9$, $f''(2) = 28$, $f'''(2) = 36$, $f^{(4)}(2) = 24$, $f^{(k)}(2) = 0$ per $k \geq 5$. Ne segue che

$$f(x) = p_4(x) = -5 + 9(x-2) + 14(x-2)^2 + 6(x-2)^3 + (x-2)^4.$$

9. Calcolare il polinomio di Taylor di grado 4 e di centro $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = \ln(1+x)$. Le derivate sono $f'(x) = (1+x)^{-1}$, $f''(x) = -(1+x)^{-2}$, $f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$, $f^{(4)} = -6(1+x)^{-4}$ quindi $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = -1$, $f'''(0) = 2$, $f^{(0)} = -6$. Ne segue che

$$p_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4.$$

   Osservazione: Si può dimostrare che $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ per $-1 < x \leq 1$.

10. Utilizzate la regola di Bernoulli-l'Hospital per calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x}$, (c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$

Suggerimento per (c): si noti che $x^2 \ln x = \dfrac{\ln x}{x^{-2}}$.

(a) forma indeterminata $[\frac{0}{0}]$; calcoliamo $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(1+\cos \pi x)'}{(x^2-2x+1)'} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\pi \operatorname{sen} \pi x}{2x-2}$ che è di nuovo della forma $[\frac{0}{0}]$; calcoliamo $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(-\pi \operatorname{sen} \pi x)'}{(2x-2)'} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-\pi^2 \cos \pi x}{2} = -\dfrac{\pi^2}{2}$, quindi $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1} = -\dfrac{\pi^2}{2}$.

(b) Non è una forma indeterminata e la regola di De l'Hospital non è applicabile; il limite è immediato: $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\ln x} = 0$.

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x^{-2}}$ è della forma $[\frac{\infty}{\infty}]$; calcoliamo $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-\dfrac{x^2}{2}) = 0$, quindi $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$.