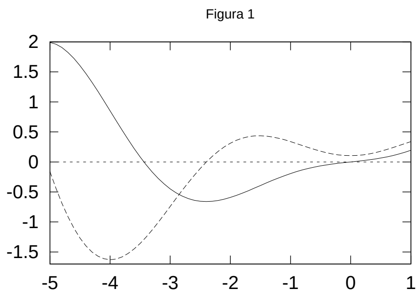
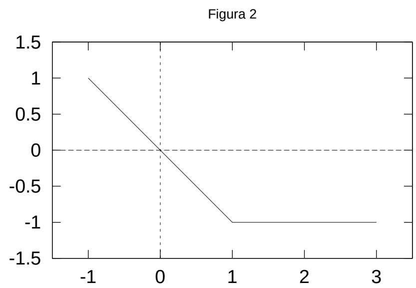
C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 26. 11. 2015

1. (a) In fig. 1 sono riportati i grafici di due funzioni reali di cui una è la derivata dell'altra. È f (curva tratteggiata) la derivata di g (curva continua) o è g la derivata di f?

   (b) Disegnate il grafico della derivata della funzione h il cui grafico è riportato in fig. 2. In quale punto la funzione h non è derivabile?

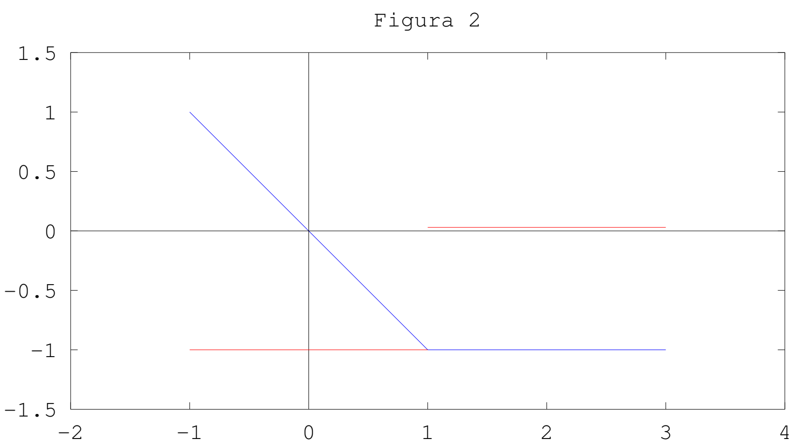
   (c) Quanto valgono $\displaystyle\int_{-1}^{0} h(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{0}^{1} h(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{1}^{3} h(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_{-1}^{3} h(x)\,dx$? (Il grafico di h è riportato in fig. 2.)





(a) $f = g'$, cioè la curva tratteggiata è la derivata (in $[-5,-4]$ entrambe le funzioni sono monotone decrescenti e quindi lì la loro derivata deve essere negativa, ma solo la f è negativa; oppure: nei punti di minimi o massimi relativi la derivata deve annullarsi, ciò capita per la f tra -3 e -2 dove g assume un minimo).

(b) Il grafico rosso è quello della derivata:



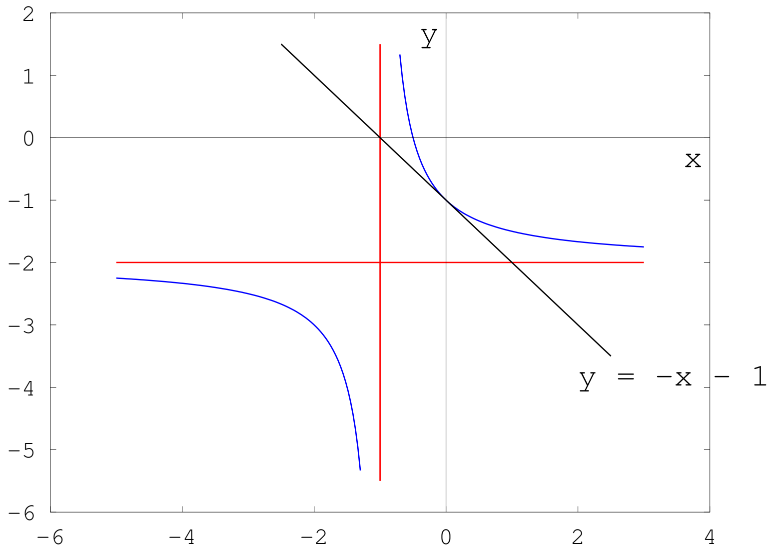
(c) $\displaystyle\int_{-1}^{0} h(x)\,dx = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_{0}^{1} h(x)\,dx = -\frac{1}{2}$, $\displaystyle\int_{1}^{3} h(x)\,dx = -2$, $\displaystyle\int_{-1}^{3} h(x)\,dx = -2$.

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2, \quad x \neq -1,$

   (a) stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente; $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0 \ \forall x \neq 0 \Rightarrow f$ è monotona decrescente in $]-\infty,-1[\,\cup\,]-1,+\infty[\, = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

(b) determinare gli asintoti; le rette di equazioni $y = -2$ e $x = -1$ sono asintoto orizzontale e verticale (sinistro discendente e destro ascendente) rispettivamente

(c) disegnare il grafico;



(d) calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto $(0, -1)$. $y + 1 = f'(0)x$, ossia $y = -x - 1$

3. Data la funzione $f(x) = x \ln x, \ \ x > 0$,

   (a) determinare gli intervalli in cui essa è crescente o decrescente; $f'(x) = 1 + \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \geq -1 \Leftrightarrow x = e^{\ln x} \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$; per $0 < x \leq \frac{1}{e}$ la f è decrescente e per $x \geq \frac{1}{e}$ crescente.

   (b) determinare gli estremanti;
   Da (a) segue che $(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$ è un punti di minimo relativo e assoluto di f.

   (c) calcolare il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale $\frac{1}{e}$;
   $p_2(x) = f(\frac{1}{e}) + f'(\frac{1}{e})(x - \frac{1}{e}) + \frac{1}{2} f''(\frac{1}{e})(x - \frac{1}{e})^2 = -\frac{1}{e} + \frac{e}{2}(x - \frac{1}{e})^2$

   (d) calcolare $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ applicando la regola di de l'Hospital (si noti che $f(x) = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$).
   $$\lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0^- \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0^- = 0.$$

4. Calcolare gli integrali:

   (a) $\displaystyle\int_2^3 x^5 \, dx$, (b) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^{-5} \, dx$, (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x) \, dx$

   (d) $\displaystyle\int_0^9 4\sqrt{x} \, dx$, (e) $\displaystyle\int_0^2 \frac{6x^2 + 4x + 2}{\sqrt{x}} \, dx$, (f) $\displaystyle\int_1^e -\frac{1}{x} \, dx$.

   (a) $\left[\frac{1}{6}x^6\right]_2^3 = \frac{665}{6}$, (b) $\left[\frac{x^{-4}}{-4}\right]_{-2}^{-1} = -\frac{15}{64}$, (c) $[-\cos x + \operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$,

   (d) $\left[\frac{8}{3}x\sqrt{x}\right]_0^9 = 72$, (f) $[-\ln|x|]_1^e = -1$,

(e) $\displaystyle\int_0^2 (6x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \left[\frac{12}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}}\right]_0^2 = \frac{284}{15}\sqrt{2}.$

5. Calcolare gli integrali indefiniti con il metodo di integrazione per parti:

   (a) $\displaystyle\int x\log_{10}x\,dx$, (b) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$, (c) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$, (d) $\displaystyle\int x\,2^x\,dx$.

   (a) $\displaystyle\frac{1}{2}x^2\log_{10}x - \frac{1}{2}\int x\log_{10}e\,dx = \frac{1}{2}x^2\log_{10}x - \frac{1}{4}x^2\log_{10}e + c,$

   (b) $\displaystyle x\,\mathrm{sen}\,x - \int \mathrm{sen}\,x\,dx = x\,\mathrm{sen}\,x + \cos x + c,$

   (c) $\displaystyle\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{9}x\sqrt{x}(3\ln x - 2) + c,$

   (d) $\displaystyle\frac{x2^x}{\ln 2} - \int \frac{2^x}{\ln 2}\,dx = \frac{x2^x}{\ln 2} - \frac{2^x}{(\ln 2)^2} + c = \frac{2^x(x\ln 2 - 1)}{(\ln 2)^2} + c.$