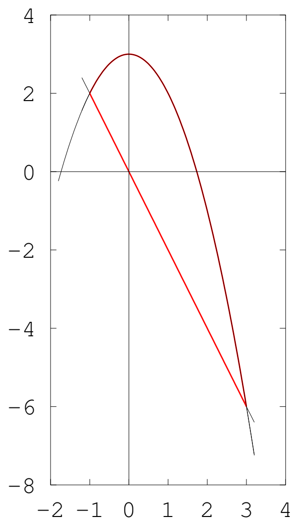
C.d.L. in Scienze naturali – Matematica 03. 12. 2015

1. Calcolare gli integrali: (a) $\displaystyle\int_{-e}^{-1} x^{-1}\,dx$, (b) $\displaystyle\int_2^3 (3x-5)^{-2}\,dx$, (c) $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx$, (d) $\displaystyle\int_1^2 xe^{-x}\,dx$, (e) $\displaystyle\int_{-3}^0 \frac{1}{\sqrt{1-5x}}\,dx$, (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\,\mathrm{sen}(3x)\,dx$, (g) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{sen}\,x}{3+\cos x}\,dx$ (sost. $u = 3+\cos x$), (h) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^4\,\mathrm{sen}\,x\,dx$ (sost. $u = 1-\cos x$), (i) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}\,dx$ (sost. $u=\sqrt{x+1}$), (k) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ (per parti).
   (a) $[\ln|x|]_{-e}^{-1} = \ln 1 - \ln e = -1$, (b) $-\frac{1}{3}[(3x-5)^{-1}]_2^3 = -\frac{1}{3}(\frac{1}{4}-1) = \frac{1}{4}$, (c) $\displaystyle\int_1^4 x^{-\frac{3}{2}}\,dx = -2[x^{-\frac{1}{2}}]_1^4 = -2\left(\frac{1}{2}-1\right) = 1$, (d) per parti: $[-xe^{-x}]_1^2 + \displaystyle\int_1^2 e^{-x}\,dx = -\frac{2}{e^2}+\frac{1}{e}-[e^{-x}]_1^2 = \frac{2}{e}-\frac{3}{e^2} = \frac{2e-3}{e^2}$, (e) $-\frac{2}{5}\left[\sqrt{1-5x}\right]_{-3}^0 = -\frac{2}{5}(1-4) = \frac{6}{5}$, (f) per parti: $-\dfrac{1}{3}[x\cos(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} + \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,dx = 0 + \frac{1}{9}[\mathrm{sen}(3x)]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{9}$, (g) $-\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{-\mathrm{sen}\,x}{3+\cos x}\,dx = -\left[\ln|3+\cos x|\right]_0^{\pi} = -(\ln 2 - \ln 4) = \ln 4 - \ln 2 = \ln\frac{4}{2} = \ln 2$, (h) $du = \mathrm{sen}\,x\,dx$; $\displaystyle\int_0^1 u^4\,du = \frac{1}{5}\left[u^5\right]_0^1 = \frac{1}{5}$, (i) $du = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$; $2\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} (u^2-1)\,du = 2\left[\frac{1}{3}u^3-u\right]_1^{\sqrt{3}} = 2\left[(\sqrt{3}-\sqrt{3})-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right] = \frac{4}{3}$,
   (k) $2\left[\sqrt{x}\ln x\right]_1^e - 2\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{e}-2\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}\,dx = 2\sqrt{e}-4\left[\sqrt{x}\right]_1^e = 4-2\sqrt{e}$.

2. Calcolare l'area della regione limitata di piano compresa tra il grafico di $y = \mathrm{sen}(\frac{x}{3})$ e l'asse x, al variare di x nell'intervallo $[0,\pi]$.
   $$\int_0^{\pi} \mathrm{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\,dx = -3\left[\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{\pi} = -3\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{3}{2}$$

3. Si trovi l'area limitata dalla parabola $y = 3-x^2$ e dalla retta $y = -2x$ (disegno!).

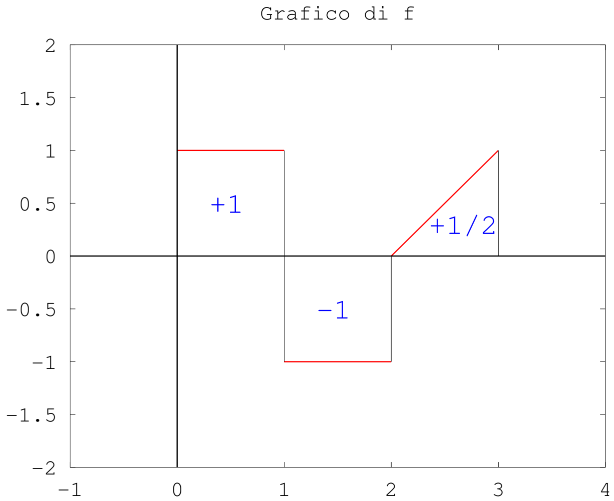


$$\int_{-1}^3 \left[(3-x^2)-(-2x)\right]\,dx = \frac{32}{3}$$

4. Dire quale dei integrali è più grande e calcolarli: $\left|\int_{-4}^{2} x\,dx\right|$, $\int_{-4}^{2} |x|\,dx$.

$$\left|\int_{-4}^{2} x\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-4}^{2}\right| = 6 < \int_{-4}^{2} |x|\;dx = \int_{-4}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx = 8+2$$

5. Determinare gli eventuali punti in cui la funzione $f\colon [0;3] \to \mathbb{R}$, il cui grafico è stato riportato qui sotto, assume il suo valor medio integrale.



Nota: Il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)\,dx$ si vede direttamente dal grafico senza fare alcun calcolo con l'espressione analitica della funzione. Dal grafico si evince che $\int_0^3 f(x)\,dx = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Di conseguenza il valor medio integrale della f sull'intervallo $[0,3]$ è $\frac{1}{6}$ che viene assunto in $[2,3]$ dove $f(x) = x - 2$. Da $x - 2 = \frac{1}{6}$ si trova che la f assume il suo valor medio integrale nel punto $x = 2 + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}$ (come si vede anche dal grafico).

6. (a) Trovare la soluzione $N = N(t)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = r\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) N \text{ (equazione logistica)}, \\ N(0) = N_0\,, \end{cases}$$

dove r e K sono costanti positive.
Suggerimento: Discutere separatamente i casi $N_0 < 0$, $N_0 = 0$, $0 < N_0 < K$, $N_0 = K$, $N_0 > K$.
Le funzioni costanti $N = N(t) = 0$ e $N = N(t) = K$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ sono soluzioni nei casi $N_0 = 0$ e $N_0 = K$ rispettivamente. Sia adesso $N_0 \neq 0$ e $N_0 \neq K$ e di conseguenza $N \neq 0$ e $N \neq K$. Allora

$$\int \frac{dN}{(1-\frac{N}{K})N} \quad = \quad r\int dt$$

scomposizione in frazioni semplici:
$$\frac{1}{(1-\frac{N}{K})N} = \frac{a}{N} + \frac{b}{1-\frac{N}{K}}$$
$$= \frac{1}{N} + \frac{1}{(1-\frac{N}{K})K}$$

integrazione:

$$\ln|N| - \ln|K-N| = \ln\left|\frac{N}{K-N}\right| = rt + c_1,\ \text{cost. di integrazione } c_1 \in \mathbb{R}$$
$$\left|\frac{K-N}{N}\right| = ce^{-rt},\ \text{dove } c = e^{-c_1} > 0.$$

Se $0 < N_0 < K$, allora $\left|\frac{K-N}{N}\right| = \frac{K-N}{N} = ce^{-rt}$. Ne segue che $c = \frac{K-N_0}{N_0}$ e

$$N = N(t) = \frac{K}{1+ce^{-rt}},\quad -\infty < t < +\infty.$$

Se invece $N_0 > K$ o $N_0 < 0$, allora $\left|\frac{K-N}{N}\right| = \frac{N-K}{N} = ce^{-rt}$. Ne segue che $c = \frac{N_0-K}{N_0}$ e

$$N = N(t) = \frac{K}{1-ce^{-rt}},$$

$t > \frac{\ln(N_0-K)-\ln(N_0)}{r}$ nel caso $N_0 > K$, $t < \frac{\ln(K-N_0)-\ln(-N_0)}{r}$ nel caso $N_0 < 0$.

(b) Trovare il punto di flesso e gli asintoti della seguente funzione logistica:

$$N(t) = \frac{5}{1+e^{-2t+3}}.$$

$N'(t) = \frac{10e^{-2t+3}}{(1+e^{-2t+3})^2} = \frac{2}{5}e^{-2t+3}[N(t)]^2$, $N''(t) = \frac{2}{5}\left(-2e^{-2t+3}[N(t)]^2 + 2e^{-2t+3}N(t)N'(t)\right) = \frac{4}{5}e^{-2t+3}N(t)[-N(t)+N'(t)]$, ne segue: $N''(t) \geq 0 \Leftrightarrow N'(t) \geq N(t) \Leftrightarrow \frac{2e^{-2t+3}}{1+e^{-2t+3}} \geq 1 \Leftrightarrow 2e^{-2t+3} \geq 1+e^{-2t+3} \Leftrightarrow e^{-2t+3} \geq 1 \Leftrightarrow -2t+3 \geq 0 \Leftrightarrow t \leq \frac{3}{2}$, quindi il punto $\left(\frac{3}{2}, N(\frac{3}{2})\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ è un punto di flesso discendente per il grafico di N. Ci sono due asintoti orizzontali: $\lim_{t\to-\infty} N(t) = 0$, $\lim_{t\to+\infty} N(t) = 5$.

7. Si consideri la reazione $2\,N_2O_5 \longrightarrow 4NO_2 + O_2$. La concentrazione $x := [N_2O_5]$ dipende dal tempo t, cioè $x = x(t)$, ed è soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -kx \\ x(0) = x_0\,, \end{cases}$$

dove $k = 8{,}05 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$.

(a) Si calcoli la soluzione del problema di Cauchy (in modo esplicito).

(b) Si trovi il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$.

(c) Dopo quante ore la concentrazione di N_2O_5 si riduce al 50% della concentrazione iniziale x_0?

(a) $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = -k\int_0^t dt \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{x}{x_0}\right) = -kt \quad\Rightarrow\quad x = x(t) = x_0e^{-kt}$

(b) $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$

(c) $\displaystyle\frac{1}{2}x_0 = x_0e^{-kt} \quad\Rightarrow\quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 = -kt \quad\Rightarrow$

$$t = \frac{\ln 2}{k} = \frac{10^5 \cdot \ln 2}{8{,}05\cdot 60^2}\ \mathrm{h} = 2{,}39\ \mathrm{h} = 2\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$$

8. Risolvere, mediante separazione delle variabili, l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = y(y-3)$$

con la condizione iniziale

(a) $y(0) = \frac{3}{2}$, (b) $y(0) = 3$, (c) $y(0) = 6$.

Le funzioni costante $y = 0$ e $y = 3$ sono soluzioni dell'equazione differenziale, quindi $y = 3$ è soluzione del problema di Cauchy (b). Sia adesso $y \neq 0$ e $y \neq 3$. Allora $\int \frac{dy}{y(y-3)} = \int dx$ e con $\frac{1}{y(y-3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{y-3} - \frac{1}{y}\right)$ si ottiene $\ln |\frac{y-3}{y}| = 3x + c$ (c è costante di integrazione), quindi $|\frac{y-3}{y}| = e^{3x+c} = e^c e^{3x}$. Nel caso (a) $|\frac{y-3}{y}| = -\frac{y-3}{y} = e^{3x+c}$ e $-\frac{\frac{3}{2}-3}{\frac{3}{2}} = 1 = e^c \Rightarrow c = 0 \Rightarrow 3 - y = ye^{3x}$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{3}{1+e^{3x}}$, $x \in \mathbb{R}$. Nel caso (c) $|\frac{y-3}{y}| = \frac{y-3}{y} = e^{3x+c}$ e $\frac{6-3}{6} = \frac{1}{2} = e^c \Rightarrow \frac{y-3}{y} = \frac{1}{2}e^{3x} \Rightarrow 2(y-3) = ye^{3x}$ e la soluzione del problema di Cauchy è $y = \frac{6}{2-e^{3x}}$, $x > \frac{\ln 2}{3}$.

9. Nella reazione bimolecolare $2\,NO_2 \longrightarrow N_2O_4$ la concentrazione $C = C(t) = [NO_2]$ soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dC}{dt} = -kC^2$$

dove k è una costante positiva. Sia $C(0) = C_0$.

(a) Trovare la soluzione dell'equazione differenziale.
$\int_{C_0}^{C} \frac{dC}{C^2} = -k \int_0^t dt \Rightarrow \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} = kt \Rightarrow C = C(t) = \frac{1}{\frac{1}{C_0}+kt}$, $t \geq 0$

(b) Trovare il limite di $C(t)$ per $t \to \infty$. $\lim_{t\to\infty} C(t) = 0$

10. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = e^y \ln x \\ y(1) = 0\,. \end{cases}$$

$\int_0^y e^{-y}\,dy = \int_1^x \ln x\,dx \Rightarrow [-e^{-y}]_0^y = [x\ln x]_1^x - \int_1^x x\frac{1}{x}\,dx \Rightarrow 1 - e^{-y} = x\ln x - x + 1 \Rightarrow e^{-x} = x(1-\ln x) \Rightarrow y = -\ln x - \ln(1-\ln x)$, $0 < x < e$

11. In una reazione chimica $A + B \longrightarrow C$ del secondo ordine le concentrazioni (molari) iniziali di A, B e C siano $[A]_0$, $[B]_0$ e 0 rispettivamente. Allora la concentrazione $x = x(t)$ di C al tempo t è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k([A]_0 - x)\cdot([B]_0 - x) \\ x(0) = 0\,, \end{cases}$$

dove k (in $s^{-1}M^{-1}$) è una costante positiva. Si calcolino la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy e il limite di $x(t)$ per $t \to \infty$ nei seguenti due casi:

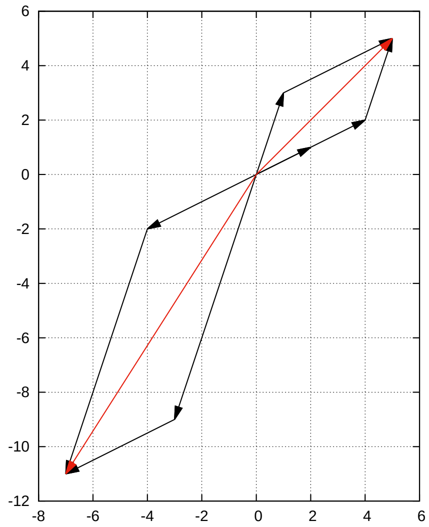
(a) $[A]_0 = [B]_0 = 2$, (b) $[A]_0 = 3$, $[B]_0 = 2$.

(a) $\int_0^x \frac{dx}{(2-x)^2} = k\int_0^t dt \Rightarrow \left[\frac{1}{2-x}\right]_0^x = kt \Rightarrow \frac{1}{2-x} = \frac{1}{2}+kt \Rightarrow x = 2-\frac{1}{\frac{1}{2}+kt},\ t>0$

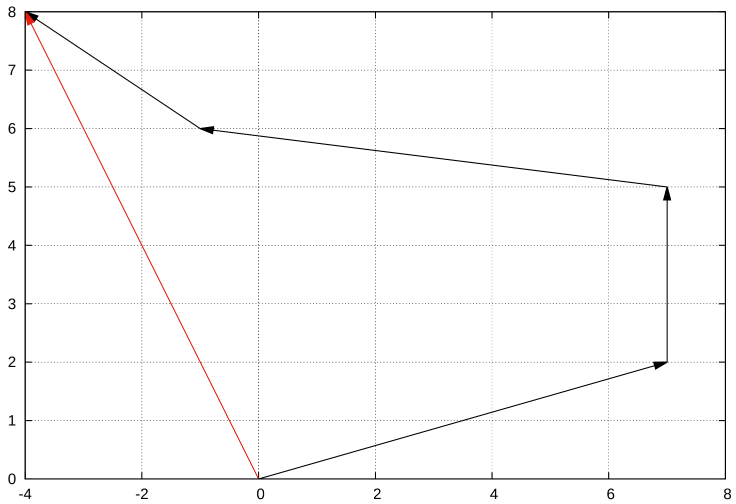
(b) $\int_0^x \frac{dx}{(2-x)(3-x)} = k\int_0^t dt \Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{2-x}-\frac{1}{3-x}\right) dx = kt \Rightarrow \ln\left|\frac{2-x}{3-x}\right| - \ln\frac{2}{3} = kt$
$\Rightarrow \frac{2-x}{3-x} = \frac{2}{3}e^{kt} \Rightarrow 2-x = \frac{2}{3}(3-x)e^{kt} \Rightarrow x = \frac{2-2e^{kt}}{1-\frac{2}{3}e^{kt}} = \frac{6-6e^{-kt}}{3-2e^{-kt}},\ t>0$

In entrambi i casi (a) e (b), $\lim_{t\to\infty} x(t) = 2$.

12. Si considerino i vettori $\vec{u} = (2,1)$ e $\vec{v} = (1,3)$. Calcolare e disegnare i vettori $2\vec{u}+\vec{v}$ e $-2\vec{u}-3\vec{v}$.
$2\vec{u}+\vec{v} = (4,2)+(1,3) = (5,5)$, $-2\vec{u}-3\vec{v} = (-4,-2)-(3,9) = (-7,-11)$.



13. Trovare la somma di $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, geometricamente usando un poligono vettoriale. Verificare il risultato con una somma algebrica.
somma $= \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix}$



14. Dati i vettori $\vec{a} = (2,1)$, $\vec{b} = (-3,2)$, calcolare $\vec{a}-\vec{b}$, $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{a}-\vec{b}|$.
$\vec{a}-\vec{b} = (5,-1)$, $|\vec{a}| = \sqrt{5}$, $|\vec{b}| = \sqrt{13}$, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{26}$.