C.d.L. in Scienze naturali – Matematica

10. 12. 2015

1. Stabilire quali delle seguenti funzioni $f_i \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $(i = 1, \ldots, 4)$ sono lineari e, in caso affermativo, scrivere la matrice associata ad f_i:

   (a) $f_1 \colon (x, y) \mapsto (xy, x + y)$; non è lineare

   (b) $f_2 \colon (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$; è lineare: $f_2(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

   (c) $f_3 \colon (x, y) \mapsto (x - y, x + y + 1)$; non è lineare (è lineare affine)

   (d) $f_4 \colon (x, y) \mapsto (2x - y, x + 3y)$. è lineare: $f_4(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

   valutare (se ciò è possibile) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} + \mathbf{C}$ non è definito,
   $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 1 \\ -5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, $3\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 11 & -8 & 3 \\ -5 & 14 & 11 \end{bmatrix}$, $\mathbf{AB}$ non è definito,
   $\mathbf{AC}$ non è definito, $\mathbf{CA} = \begin{bmatrix} 6 & -4 & 2 \\ 3 & 13 & 13 \end{bmatrix}$.

3. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$, ed i vettori

   $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, calcolare $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 9 & 18 & 37 \\ 6 & 12 & 28 \end{bmatrix}$, $\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$,
   $\mathbf{Bv} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{vw} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{wv} = 1$.

4. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,

   calcolare $\mathbf{AO} = \mathbf{O}$, $\mathbf{OA} = \mathbf{O}$, $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$, $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$,
   $\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.

5. Calcolare la matrice associata alla composizione $f_4 \circ f_2$ delle funzioni f_2 e f_4 dell'esercizio 1.
   $(f_4 \circ f_2)(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$