C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 27/01/2016

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Qual è il coefficiente di a^3b^7 nello sviluppo della potenza $(a+b)^{10}$? $\boxed{\binom{10}{3} = 120}$

   E qual è la somma di tutti i coefficienti di tale sviluppo? $\boxed{2^{10} = 1024}$

   Qual è il coefficiente di $a^3b^7c^2$ nello sviluppo della potenza $(a+b+c)^{12}$?

   $\boxed{((a+b)+c)^{12} = \cdots + \binom{12}{2}(a+b)^{10}c^2 + \cdots = \cdots + \binom{\mathbf{12}}{\mathbf{2}}\binom{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}a^3b^7c^2 + \cdots;\ \mathbf{7920}}$

2. Si consideri la funzione $f(x) = \log_{10}\left(\frac{1}{x}\right)$, $x > 0$, e si calcoli:

   (a) $f'(x) = \boxed{(-\log_{10} x)' = \left(-\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}\right)' = -\dfrac{\log_{10} e}{x} = -\dfrac{1}{x\ln(10)}}$

   (b) $f''(x) = \boxed{\dfrac{\log_{10} e}{x^2} = \dfrac{1}{x^2\ln(10)}}$

   (c) il differenziale della f in x e lo usi per calcolare approssimativamente $\frac{\Delta x}{x}$ in funzione di Δf:

   $\boxed{df(x,\Delta x) = f'(x)\,\Delta x = -\frac{\Delta x}{x\ln(10)};\quad \frac{\Delta x}{x} = -\ln(10)\cdot df \approx -\ln(10)\cdot\Delta f}$,

   (d) i coefficienti a, b, c del polinomio di Taylor $p_2(x) = a + b(x-1) + c(x-1)^2$ della f di grado 2 e di centro 1:

   $\boxed{a = f(1) = 0 \quad , b = f'(1) = -\dfrac{1}{\ln(10)} \quad , c = \dfrac{1}{2!}f''(1) = \dfrac{1}{2\ln(10)}}$,

   (e) $\displaystyle\int_1^e f(x)dx = \boxed{\begin{array}{l} -\frac{1}{\ln(10)}\int_1^e 1\cdot\ln(x)\,dx = -\frac{1}{\ln(10)}\left([x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) = \\ -\frac{1}{\ln(10)}(e-e+1) = -\frac{1}{\ln(10)} = -\log_{10} e \end{array}}$

   (integrazione per parti).

3. Data la funzione $f(x) = \dfrac{4}{1+5e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$, calcolare

   (a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \boxed{0}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{4}$

(b) $f'(x) = \boxed{4\left((1+5e^{-x})^{-1}\right)' = 20e^{-x}\left(1+5e^{-x}\right)^{-2}}$

(c) $f''(x) = \boxed{\begin{array}{l} 20\left(e^{-x}\left(1+5e^{-x}\right)^{-2}\right)' = 20\left(-e^{-x}\left(1+5e^{-x}\right)^{-2} + 10e^{-2x}\left(1+5e^{-x}\right)^{-3}\right) \\ = 20e^{-x}\left(1+5e^{-x}\right)^{-2}\left(-1+10e^{-x}\left(1+5e^{-x}\right)^{-1}\right) \end{array}}$

(d) il punto di flesso di f: $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{-x}\left(1+5e^{-x}\right)^{-1} \geq \frac{1}{10} \Leftrightarrow e^{x}\left(1+5e^{-x}\right) \leq 10 \Leftrightarrow e^{x} \leq 5 \Leftrightarrow x \leq \ln 5$, cioè $(\ln 5, 2)$ è punto di flesso discendente

(e) $\displaystyle\int_{\ln(5)}^{\ln(15)} f(x)\,dx = \boxed{\int_{10}^{20} \frac{4}{1+\frac{5}{t-5}} \cdot \frac{1}{t-5}\,dt = \int_{10}^{20} \frac{4}{t}\,dt = 4(\ln 20 - \ln 10) = 4\ln 2}$

(integrazione per sostituzione: $x = \ln(t-2)$)

$dx = \frac{dt}{t-5}$, $e^{x} = t-5$, $e^{-x} = \frac{1}{t-5}$, $t = e^{x}+5$

4. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x\sqrt{y+2} \\ y(\sqrt{5}) = -1\,. \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}(x^2-3)^2 - 2 \qquad \text{dominio: } x \geq \sqrt{3}}$$

Se $y > -2$, separando le variabili, si ottiene:

$$\int (y+2)^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{y+2} = x^2 + c,\ c \text{ costante di integrazione,}$$

dalla condizione iniziale segue: $2\sqrt{-1+2} = \sqrt{5}^2 + c$, quindi $c = -3 \Rightarrow \sqrt{y+2} = \frac{1}{2}(x^2-3)$, dove $x^2 > 3$ (poiché $y > -2$) che, tenendo conto della condizione iniziale, significa $x > \sqrt{3}$. Si verifica che $y'(\sqrt{3}) = 0$. Ciò implica che l'equazione differenziale è soddisfatta anche per $x = \sqrt{3}$.

Quindi la soluzione è $y = \frac{1}{4}(x^2-3)^2 - 2$ con $x \geq \sqrt{3}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$, calcolare

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 11 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{b}^T\mathbf{b} = \boxed{22}$, dove $\mathbf{b}^T$ è il trasposto di $\mathbf{b}$,

(d) (se ciò è possibile) $\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}}$.

(a),(b) $\left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -3 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2+2R1 \to \\ R3-2R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -3 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -11 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$R3+\frac{7}{5}R2 \to \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -3 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 8 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{7}{5} & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -R2/5 \to \\ 5R3 \to \end{array}$

$\left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -3 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1-5R3 \to \\ R2+\frac{8}{5}R3 \to \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -3 & 0 & -8 & -19 & -35 & -25 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 \end{array}\right]$

$R1+3R2 \to \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 6 & 11 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 7 & 5 \end{array}\right]$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 11 & 8 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$