C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 01/07/2016

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Si utilizzino solo le cifre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ per formare dei numeri.

   Quanti numeri di 4 cifre, anche ripetute, si possono formare? $\boxed{8^4 = 2^{12} = 4096}$

   Quanti di questi numeri contengono esattamente due volte la cifra 1? $\boxed{\binom{4}{2} \cdot 7^2 = 6 \cdot 49 = 294}$

   Quanti numeri di 8 cifre tutte distinte si possono formare? $\boxed{8! = 40320}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $x > 0$, calcolare:

   (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{-\infty}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \boxed{0, \text{ perché } \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \frac{1}{x} \to 0}$

   (applicare la regola di de l'Hospital)

   (b) $f'(x) = \boxed{\dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}}$

   (c) $f''(x) = \boxed{\dfrac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot (1 - \ln x)}{x^4} = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}}$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   $\boxed{f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e;\ f''(e) = -\frac{1}{e^3} < 0;\ \left(e, \frac{1}{e}\right) \text{ è punto di massimo locale e assoluto}}$

   (e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$:

   $\boxed{y = \frac{1}{e} + f'(e)(x - e) = \frac{1}{e}, \text{ retta orizzontale}}$

   (f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro e:

   $\boxed{p_2(x) = f(e) + f'(e)(x - e) + \dfrac{f''(e)}{2!}(x - e)^2 = \dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{2e^3}(x - e)^2}$

   (g) i punti di flesso della f:

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$; f'' cambia in $e\sqrt{e}$ il segno da $-$ a $+$, $\left(e\sqrt{e}, \dfrac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$ è punto di flesso ascendente

   (h) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \boxed{\int_0^1 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}, \text{ dove } t = \ln x,\ dt = \frac{dx}{x}.}$

3. $\displaystyle\int_4^9 \frac{3x+3}{2\sqrt{x}}\,dx = \boxed{\int_4^9 \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)dx = \left[x^{\frac{3}{2}} + 3x^{\frac{1}{2}}\right]_4^9 = 27+9-8-6 = 22}$

4. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y} \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$

$y(x) = -\sqrt{1-x^2}$	dominio: $-1 < x < 1$

Ovviamente $y \neq 0$, e per la condizione iniziale $y < 0$. Separando le variabili si ottiene: $\displaystyle\int y\,dy = -\int x\,dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$, cioè $y^2 = 2c - x^2$, c costante di integrazione. Dalla condizione iniziale segue: $y = -\sqrt{2c - x^2}$ con $c = \frac{1}{2}$, quindi $y = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -8 & 9 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1, & -2, & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -9 \end{bmatrix}$,

(a) calcolare la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}}$,

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{aA} = \boxed{\begin{bmatrix} -1, & -5, & -11 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{Aa}^T = \boxed{\begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -9 \end{bmatrix}}$,

(c) dire se $\mathbf{A}$ è invertibile e giustificare la risposta:

In (a) si è ottenuta un'unica soluzione, cioè il sistema lineare (a) è determinato. Ne segue che la matrice $\mathbf{A}$ è invertibile.

(a) $\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & 9 & -8 \\ -2 & 8 & -3 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2+3R1 \to \\ R3-2R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 2 & 1 & -7 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3-2R2 \to \end{array}$

$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & -5 & 15 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1/(-1) \to \\ \\ R3/(-5) \to \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1-2R3 \to \\ R2-3R3 \to \\ \end{array}$

$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1+3R2 \to \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$