C.d.L. in Scienze naturali

Prova di Matematica del 18/07/2016

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Quanti diversi risultati $CCCCCCCC$, $CCCCCCCT$, $CCCCCCTC$, ... si possono avere su 8 lanci di una moneta? (C = croce, T = testa) $\boxed{2^8 = 256}$

   Quanti di tali risultati contengono T esattamente 4 volte? $\boxed{\binom{8}{4} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 70}$

   Quanti di tali risultati contengono T almeno 4 volte? $\boxed{2^8 - \sum_{k=0}^{3}\binom{8}{k} = 163}$

2. Data la funzione $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{x}$, $x > 0$, calcolare:

   (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{+\infty}$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \boxed{0, \text{ perché } \frac{((\ln x)^2)'}{(x)'} = \frac{2\ln x}{x}, \frac{(2\ln x)'}{(x)'} = \frac{2}{x} \to 0}$

   (applicare la regola di de l'Hospital)

   (b) $f'(x) = \boxed{\dfrac{2(\ln x)\cdot \frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \dfrac{(\ln x)\cdot(2-\ln x)}{x^2}}$

   (c) $f''(x) = \boxed{\dfrac{(\frac{2}{x} - 2\frac{1}{x}\ln x)\cdot x^2 - 2x\cdot(2\ln x - (\ln x)^2)}{x^4} = 2\cdot\dfrac{(\ln x)^2 - 3\ln x + 1}{x^3}}$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x = 0 \vee \ln x = 2) \Leftrightarrow (x = 1 \vee x = e^2)$; $(1, 0)$ min. ass. perché $f(x) \geq 0$; $\left(e^2, \frac{4}{e^2}\right)$ mass. rel. perché $f''(e^2) = 2\cdot\frac{2^2 - 3\cdot 2 + 1}{e^6} < 0$

   (e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$:

   $$y = \frac{1}{e} + f'(e)(x-e) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}(x-e) = \frac{x}{e^2}$$

   (f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro e:

   $$p_2(x) = f(e) + f'(e)(x-e) + \frac{f''(e)}{2!}(x-e)^2 = \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2}(x-e) - \frac{1}{e^3}(x-e)^2$$

   (g) le ascisse dei punti di flesso della f:

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)^2 - 3\ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{e^{3\pm\sqrt{5}}}$; lì f'' cambia il segno da $+$ a $-$ (flesso discendente) o da $-$ a $+$ (flesso ascendente) rispettivamente.

(h) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx = \boxed{\int_0^1 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3},\quad \text{dove } t = \ln x,\ dt = \frac{dx}{x}.}$

3. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4}{\pi} + \operatorname{sen}(2x)\right) dx = \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4}{\pi}\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(2x)\,dx = 2 + \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 3}$

4. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 \\ y(0) = -1\,. \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad\qquad \text{dominio: } -\infty < x < +\infty}$$

Se $y \neq 0$ (per la condizione iniziale quindi $y < 0$), separando le variabili si ottiene: $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{y} = x^2 + c$, c costante di integrazione. Dalla condizione iniziale: $-\dfrac{1}{-1} = c$, quindi $c = 1$ e $y(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -8 & 9 \\ 2 & -5 & 7 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -32 & -11 \\ -11 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ -9 \end{bmatrix}$,

(a) risolvere il sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan: $\mathbf{x} =$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -32 \\ -11 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -11 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}},$$

(b) calcolare (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -8 & 0 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}}, \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & -8 & -35 \\ 4 & -14 & 2 \end{bmatrix}}$,

(c) dire se $\mathbf{A}$ è invertibile e giustificare la risposta:

$\boxed{\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \text{ ha infinite soluzioni} \Rightarrow \mathbf{A} \text{ non è invertibile.}}$

(a) $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & -8 & 9 & -8 \\ 2 & -5 & 7 & -9 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2+3R1 \to \\ R3+2R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ R3-R2 \to \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1/(-1) \to \\ \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1+3R2 \to \\ \\ \\ \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & -32 \\ 0 & 1 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, cioè $\begin{cases} x_1 \quad\;\; + 11x_3 = & -32 \\ \quad x_2 + \;3x_3 = & -11 \\ \qquad\qquad\; x_3 = & t \text{ (variabile libera)} \end{cases}$