C.d.L. in Scienze naturali
Prova di Matematica del 20/09/2016

Cognome: ______________________________

Nome: ______________________________

Matricola: ______________________________

Svolgere gli esercizi nelle facciate bianche disponibili e scrivere le soluzioni nei riquadri. Sarà ritirato soltanto questo fascicolo.

1. Siano dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e $B = \{0, 1\}$.

   Quante sono le possibili funzioni $A \to B$? $\boxed{2^{10} = 1024}$

   Quanti sono i sottoinsiemi di A (compresi l'insieme vuoto ed A stesso)? $\boxed{2^{10}}$

   Quanti sono i sottoinsiemi di A formati da cinque elementi? $\boxed{\binom{10}{5} = 252}$

2. Data la funzione $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x$, $x > 0$, calcolare:

   (a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \boxed{\left(\lim_{x\to 0^+} \ln x\right)\left(\lim_{x\to 0^+} (\ln x + 2)\right) = +\infty}$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \boxed{+\infty}$

   (b) $f'(x) = \boxed{2(\ln x)\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} = \dfrac{2}{x}(\ln x + 1)}$

   (c) $f''(x) = \boxed{-\dfrac{2}{x^2}(\ln x + 1) + \dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{x^2}\ln x}$

   (d) i punti stazionari di f e classificarli:

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$; $f''(\frac{1}{e}) = 2e^2 > 0$; $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ è punto di min. locale e ass.

   (e) l'equazione della retta tangente al grafico della f nel punto $(1, 0)$:

   $y = f'(1)(x - 1) = 2(x - 1)$

   (f) il polinomio di Taylor della f di grado 2 e di centro $\frac{1}{e}$:

   $p_2(x) = f(\frac{1}{e}) + f'(\frac{1}{e})(x - \frac{1}{e}) + \frac{f''(\frac{1}{e})}{2!}(x - \frac{1}{e})^2 = -1 + e^2(x - \frac{1}{e})^2 = ex(ex - 2)$

   (g) i punti di flesso della f:

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$; f'' cambia in 1 il segno da $+$ a $-$;
   $(1, 0)$ è punto di flesso discendente

(h) $\int_1^e f(x)\,dx = \boxed{\left[x(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e x\cdot 2(\ln x)\frac{1}{x}\,dx + 2\int_1^e \ln x\,dx = \left[x(\ln x)^2\right]_1^e = e.}$

($\int f(x)\,dx = \int (\ln x)^2\,dx + 2\int \ln x\,dx$, poi $\int (\ln x)^2\,dx$ per parti).

3. $\int_1^4 \frac{3x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \boxed{\int_1^4 \left(3x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)\,dx = \left[2x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^4 = 16+4-2-2=16}$

4. Calcolare la soluzione $y = y(x)$ del seguente problema di Cauchy, e precisare il suo dominio:

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{y^3}{4\sqrt{x}} \\ y(1) = -1\,. \end{cases}$$

$y(x) = \boxed{-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}}$

Dominio: $\boxed{0 < x < +\infty}$

Per $x > 0$, separando le variabili, si ottiene: $\int -2y^{-3}\,dy = \int \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\,dx \quad \Rightarrow$ $y^{-2} = x^{\frac{1}{2}} + c$, cioè $y^2 = \frac{1}{\sqrt{x}+c}$, c costante di integrazione; dalla condizione iniziale segue: $(-1)^2 = \frac{1}{1+c}$, $c = 0$ e $y < 0$. Ciò implica $|y| = -y = \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \Rightarrow y = -\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$.

5. Date le matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -8 & 9 \\ -2 & 8 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -48 & -7 \\ -9 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, calcolare:

(a) la soluzione del sistema lineare $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ con l'algoritmo di Gauss-Jordan:

$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -48 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}}$, (b) $\mathbf{A}^{-1} = \boxed{\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -48 & -7 & 11 \\ -9 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}}$,

(c) (se ciò è possibile) $\mathbf{AB} = \boxed{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$, $\mathbf{B}^T\mathbf{A} = \boxed{\begin{bmatrix} 5 & -8 & -9 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}}$,

dove $\mathbf{B}^T$ è la trasposta di $\mathbf{B}$.

(a), (b):

$$\left[\begin{array}{rrr|r|rrr} -1 & 3 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 8 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R2+3R1 \to \\ R3-2R1 \to \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} -1 & 3 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 15 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -10 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R3-2R2 \to \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} -1 & 3 & -2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 15 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -40 & -8 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} R1/(-1) \to \\ \\ R3/(-5) \to \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -3 & 2 & -5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 15 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \begin{array}{l} R1-2R3 \to \\ R2-3R3 \to \\ \end{array} \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & -3 & 0 & -21 & -\frac{21}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$R1+3R2 \to \left[\begin{array}{rrr|r|rrr} 1 & 0 & 0 & -48 & -\frac{48}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -9 & -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 8 & \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -48 \\ -9 \\ 8 \end{bmatrix}, \ \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{48}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ -\frac{9}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{8}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -48 & -7 & 11 \\ -9 & -1 & 3 \\ 8 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$